

問題 B

(*) を満たす $f(x) \in T$ 全体の集合を U とする. $0 \notin T$ であるから $0 \notin U$ である. $f(x) \in T$ に対し, その次数を n とする. $f(x) \in U$ ならば, (*) により $0 \leq n \leq 6$ であり,

$$f(x) = \sum_{j=0}^n a_j x^j \quad (a_j \ (0 \leq j \leq n) \text{ は整数で, } a_n \neq 0)$$

とおける. このとき, (*) の両辺の最高次の係数を比較して,

$$a_n = a_n \cdot (-1)^n a_n \quad \therefore a_n = (-1)^n$$

一方, $x^{12} - 1 = 0$ の解は

$$x = \cos \frac{2k\pi}{12} + i \sin \frac{2k\pi}{12} \quad (k = 0, 1, 2, \dots, 11)$$

であり, これらは相異なる. したがって, $f(x) = 0$ ($f(x) \in T$) は重解をもたない. また, 上の 12 個の解のうち, 実数であるのは $x = \pm 1$ だけである.

次に, $g(x)$ を実数係数の多項式とする. $g(\alpha) = 0$ ($\alpha \in \mathbb{C}$) ならば,

$$g(\bar{\alpha}) = \overline{g(\alpha)} = 0$$

であり, 特に α が虚数のときは, $\alpha \neq \bar{\alpha}$ であるから, $g(x)$ は

$$(x - \alpha)(x - \bar{\alpha}) = x^2 - (\alpha + \bar{\alpha})x + \alpha\bar{\alpha}$$

で割り切れる. たとえば, $g(i) = 0$ または $g(-i) = 0$ ならば, $g(x)$ は $x^2 + 1$ で割り切れる.

さて,

$$\begin{aligned} x^{12} - 1 &= (x^6 - 1)(x^6 + 1) \\ &= (x^3 - 1)(x^3 + 1) \left\{ (x^2)^3 + 1 \right\} \\ &= (x - 1)(x + 1)(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)(x^2 + 1)(x^4 - x^2 + 1) \\ (x^4 - x^2 + 1 &= (x^2 + 1)^2 - (\sqrt{3}x)^2 = (x^2 - \sqrt{3}x + 1)(x^2 + \sqrt{3}x + 1)) \end{aligned}$$

となるから, $f(x) \in T$ の最高次の係数を a とすると, $a = 1$ または -1 であり,

$$\begin{aligned} f(x) &= a(x - 1)^{n_1}(x + 1)^{n_2}(x^2 + x + 1)^{n_3}(x^2 - x + 1)^{n_4}(x^2 + 1)^{n_5} \\ &\quad \times (x^2 - \sqrt{3}x + 1)^{n_6}(x^2 + \sqrt{3}x + 1)^{n_7} \\ (n_j \ (1 \leq j \leq 7) &\text{ は } 0 \text{ または } 1 \text{ であり, } n_1 + n_2 + 2n_3 + 2n_4 + 2n_5 + 2n_6 + 2n_7 = n) \end{aligned}$$

とおける. $n \geq 1$ ならば, $f(x)$ の x^{n-1} の係数は

$$a[-\{n_1 - n_2 - n_3 + n_4 + \sqrt{3}(n_6 - n_7)\}]$$

である. これは整数であるから, $\sqrt{3}$ が無理数であることを用いると

$$n_6 = n_7 = 0 \quad \text{または} \quad n_6 = n_7 = 1$$

がいえる. よって, $f(x) \in T$ ($n \geq 1$) のとき, $f(\alpha) = \alpha^4 - \alpha^2 + 1$ となる $\alpha \in \mathbb{C}$ があれば, $f(x)$ は $x^4 - x^2 + 1$ で割り切れる. 一般に, $f(x) \in T$ が偶関数を因数にもつならば, $f(x)f(-x) = 0$ は重解をもつから $f(x)f(-x) \notin T$ であり, $f(x) \notin U$ となることに注意しよう.

次に, $f(x) \in U$ に対し, $g(x) = (-1)^n f(-x)$ (n は $f(x)$ の次数) とおく. $g(x) \in T$ であり,

$$g(-x) = (-1)^n f(x), \quad g(-x^2) = (-1)^n f(x^2)$$

$$g(x)g(-x) = f(x)f(-x) = f(x^2) = (-1)^n g(-x^2) \in T$$

$$g(x) \in U \iff (-1)^n g(-x^2) = g(x^2)$$

$$\iff g(x) \text{ は, } n \text{ が奇数ならば奇関数であり, } n \text{ が偶数ならば偶関数である.}$$

また, $f(x) \in U, g(x) \in S$ ($f(x)g(x)f(-x)g(-x) \in T$) のとき, $h(x) = f(x)g(x)$ とおくと

$g(x) \in T, h(x) \in T$ であり,

$$h(x^2) = f(x^2)g(x^2), h(x)h(-x) = f(x)f(-x)g(x)g(-x) = f(x^2)g(x)g(-x) \in T$$

$$h(x) \in U \iff f(x^2)g(x^2) = f(x^2)g(x)g(-x) \iff g(x^2) = g(x)g(-x) \iff g(x) \in U$$

以上述べたことを用いて

$$U = \{1, -(x-1), x^2+x+1, -(x^3-1)\}$$

を示す. まず, (右辺) $\subset T$ に注意する. $1 \in U$ は明らかである.

$f(x) = -(x-1)$ のとき

$$f(x)f(-x) = -(x-1)(x+1) = -(x^2-1) = f(x^2) \in T \text{ } (* \text{ 成立})$$

$f(x) = x^2+x+1$ のとき

$$f(x)f(-x) = (x^2+x+1)(x^2-x+1) = x^4+x^2+1 = f(x^2) \in T \text{ } (* \text{ 成立})$$

したがって, $-(x-1) \in U, x^2+x+1 \in U$ であり,

$$-(x-1)(x^2+x+1) = -(x^3-1) \in U$$

また, $-(x-1), -(x^3-1)$ はいずれも奇関数ではなく, x^2+x+1 は偶関数ではないから

$$(-1)\{-(x-1)\} = -(x+1) \notin U$$

$$(-x)^2 + (-x) + 1 = x^2 - x + 1 \notin U$$

$$-[-\{(-x)^3-1\}] = -(x^3+1) \notin U$$

よって, 次の9個の式はいずれも U に属さない.

$$\{-(x-1)\}\{-(x+1)\}, \{-(x-1)\}(x^2-x+1), \{-(x-1)\}\{-(x^3+1)\},$$

$$(x^2+x+1)\{-(x+1)\}, (x^2+x+1)(x^2-x+1), (x^2+x+1)\{-(x^3+1)\},$$

$$\{-(x^3-1)\}\{-(x+1)\}, \{-(x^3-1)\}(x^2-x+1), \{-(x^3-1)\}\{-(x^3+1)\}$$

ゆえに, 求める $f(x) \in T$ は

$$f(x) = 1, -(x-1), x^2+x+1, -(x^3-1)$$