

問題 A

以下、 C 内の任意の点 P を固定して考える． C の半径を 1 としても一般性を失わない．

(ア) 弦 $A_i A_{i+1}$ ($1 \leq i \leq 4$) が C の直径の場合

$A_i A_{i+1}$ の中点は O であり、 B_i は O に一致する．したがって、

$$\overrightarrow{OB_i} = \vec{0} = \overrightarrow{OA_i} + \overrightarrow{OA_{i+1}}$$

(イ) 弦 $A_i A_{i+1}$ ($1 \leq i \leq 4$) が C の直径でない場合

$$OA_i = OA_{i+1} = BA_i = BA_{i+1}$$

であるから、四辺形 $OA_i B_i A_{i+1}$ はひし形である．したがって、

$$\overrightarrow{OB_i} = \overrightarrow{OA_i} + \overrightarrow{OA_{i+1}}$$

(ア)、(イ) いずれの場合も

$$\frac{\overrightarrow{OB_1} + \overrightarrow{OB_3}}{2} = \frac{\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \overrightarrow{OA_3} + \overrightarrow{OA_4}}{2} = \frac{\overrightarrow{OB_2} + \overrightarrow{OB_4}}{2}$$

$$(B_1 \neq B_3, B_2 \neq B_4)$$

となるから、 P が 2 直線 $B_1 B_3, B_2 B_4$ の交点であるための条件は

$$(*) \quad \overrightarrow{OP} = \frac{\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \overrightarrow{OA_3} + \overrightarrow{OA_4}}{2}$$

である．したがって、 $(*)$ を満たす C に内接する四辺形 $A_1 A_2 A_3 A_4$ が無数にあることを示せばよい．

$d = \frac{1}{2} OP$ とおく． $0 \leq d < \frac{1}{2}$ であることに注意する．

(1) $d = 0$ のとき

$P = O$ であり、 C に内接する長方形 $A_1 A_2 A_3 A_4$ は無数にある．それらの 2 つの対角線はいずれも C の直径であるから、 $(*)$ は成立する．

(2) $0 < d < \frac{1}{2}$ のとき

$C: x^2 + y^2 = 1$, $P(2d, 0)$ となるように座標軸をとる．点 $M_1(d, e)$ ($e > 0$) を通り、 OM_1 に垂直な直線を ℓ_e とすると

$$\ell_e: dx + ey = d^2 + e^2$$

$$(\ell_e \text{ の傾き}) = -\frac{d}{e} < 0$$

$$(\ell_e \text{ の } x \text{ 切片}) = \frac{e^2}{d} + d$$

ここで、 $f(e) = \frac{e^2}{d} + d$ とおくと、 $f(e)$ ($e > 0$) は増加関数であり、

$$f\left(\sqrt{d(1-d)}\right) = \frac{d(1-d)}{d} + d = 1$$

$e = \sqrt{1-d^2}$ のとき、 ℓ_1 は M_1 で C に接している．このことに注意して、以下、

$$\sqrt{d(1-d)} < e < \sqrt{1-d^2} \quad \cdots (\alpha)$$

とする．このとき、 C と ℓ_e は異なる 2 点で交わるから、これらの交点を

$$A_1, A_2 \quad ((A_1 \text{ の } x \text{ 座標}) > (A_2 \text{ の } x \text{ 座標}))$$

とし、 x 軸に関する A_1, A_2, M_1 の対称点を順に A_4, A_3, M_2 とする．このようにして定まる四辺形

$A_1 A_2 A_3 A_4$ に対し、 M_1 は線分 $A_1 A_2$ の中点、 M_2 は線分 $A_3 A_4$ の中点であり、

$$\overrightarrow{OP} = (2d, 0) = \overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{OM_2} = \frac{\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \overrightarrow{OA_3} + \overrightarrow{OA_4}}{2} \quad ((*) \text{ 成立})$$

(α) を満たす e の値は無数にあり，異なる値に対しては異なる四辺形 $A_1A_2A_3A_4$ が対応する．

以上，(1), (2) により，(*) を満たす C に内接する四辺形 $A_1A_2A_3A_4$ は無数に存在する．