数学解法コンテスト　第16回

問題A

平面上に，点Oを中心とする単位円 C があり，その内部に点Gがある．点Pが次の条件をみたして動くとき，点Pの通過領域を求めよ．

条件：円 C の内部に含まれる三角形で，点Gを重心とし，点Pを頂点とするものが存在する．

問題B

集合 $T=\left\{ \dfrac{n(n+1)}{2} \;\middle|\; n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots \right\}$ に対して，その部分集合 A を

$$A=\{a \mid a_i \in T\ (i=1,\ 2) \text{ かつ } a=a_1+a_2 \in T\}$$

で定める．このとき，次の条件をみたす無限集合 A_i $(i=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 8)$ が存在することを示せ．

$$A_i \cap A_j = \varnothing\ (1 \leqq i < j \leqq 8) \text{ かつ } A=A_1\cup A_2\cup A_3\cup\cdots\cup A_8$$

数学解法コンテスト　第16回　解答例

問題 A

P を平面上の点とする．P が特に問題文の条件をみたす動点のとき，P の通過領域を D とする．

まず，次の条件 (α), (β) が同値であることを示す．

(α)　P$\in D$

(β)　P は C の内部にある G と異なる点であり，次の式で定まる点 M も C の内部にある．

$$\overrightarrow{\mathrm{OM}} = \frac{3\overrightarrow{\mathrm{OG}} - \overrightarrow{\mathrm{OP}}}{2}$$

$(\alpha) \Longrightarrow (\beta)$：条件を満たす三角形の 3 頂点を P, Q, R とする．G はこの三角形の重心であるから P$\neq$G である．また，P, Q, R は C の内部にあり，

$$\overrightarrow{\mathrm{OM}} = \frac{\left(\overrightarrow{\mathrm{OP}} + \overrightarrow{\mathrm{OQ}} + \overrightarrow{\mathrm{OR}}\right) - \overrightarrow{\mathrm{OP}}}{2} = \frac{\overrightarrow{\mathrm{OQ}} + \overrightarrow{\mathrm{OR}}}{2}$$

が成り立つ．したがって，M は線分 QR の中点であり，C の内部にある．$\big((\beta)$ 成立$\big)$

$(\beta) \Longrightarrow (\alpha)$：

$$\overrightarrow{\mathrm{PM}} = \overrightarrow{\mathrm{OM}} - \overrightarrow{\mathrm{OP}} = \frac{3\left(\overrightarrow{\mathrm{OG}} - \overrightarrow{\mathrm{OP}}\right)}{2} = \frac{3}{2}\overrightarrow{\mathrm{PG}} \neq \vec{0}$$

が成り立つから P$\neq$M であり，G は線分 PM を 2 : 1 に内分する点である．

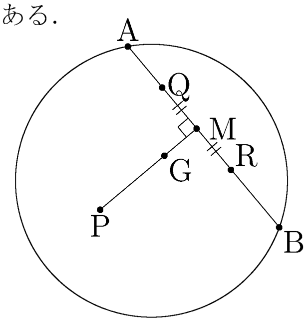
次に，M を通る C の弦 AB を

AB$\perp$PM，MA$\leqq$MB

を満たすようにとり，異なる 2 点 Q, R を

$$\overrightarrow{\mathrm{MQ}} = \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{MA}},\quad \overrightarrow{\mathrm{MR}} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{MA}}$$

で定める．Q, R は C の内部にあり，M は線分 QR の中点である．したがって，P, Q, R は C の内部に含まれる三角形の 3 頂点であり，G はこの三角形の重心である．$\big((\alpha)$ 成立$\big)$



(α), (β) は同値であるから

P $\in D$ $\Longleftrightarrow$ P は C の内部にある G と異なる点であり，$\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}} - 3\overrightarrow{\mathrm{OG}}\right| < 2$ を満たす．

よって，点 O$'$ を $\overrightarrow{\mathrm{OO'}} = 3\overrightarrow{\mathrm{OG}}$ で定め，O$'$ を中心とする半径 2 の円を C' とすると

$$D = \{\mathrm{P} \mid \mathrm{P} \in (C \text{ の内部}) \cap (C' \text{の内部}) \text{ かつ } \mathrm{P} \neq \mathrm{G}\}$$

ここで，C と C' が異なる 2 点で交わるための条件は

$$2 - 1 < \mathrm{OO'} = 3\mathrm{OG} < 2 + 1 \quad \text{すなわち} \quad \frac{1}{3} < \mathrm{OG} < 1$$

G の定め方から $0 \leqq \mathrm{OG} < 1$ であり，$0 \leqq \mathrm{OG} \leqq \dfrac{1}{3}$ のときは (C の内部) $\subset$ (C'の内部) となることに注意する．

以上により，求める通過領域は

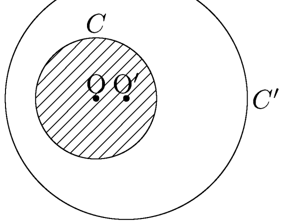
$$\begin{cases} 0 \leqq \mathrm{OG} \leqq \dfrac{1}{3} \text{ のとき} & C \text{ の内部 (ただし，点 G は除く)} \\ \dfrac{1}{3} < \mathrm{OG} < 1 \text{ のとき} & C \text{ の内部と } C' \text{ の内部の共通部分 (ただし，点 G は除く)} \end{cases}$$

(C' は線分 OG を 3 : 2 に外分する点を中心とする半径 2 の円)

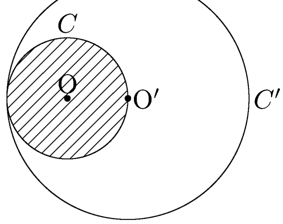
(注釈 1)

D を図示すると，次の図の斜線部分 (境界を除く) となる．

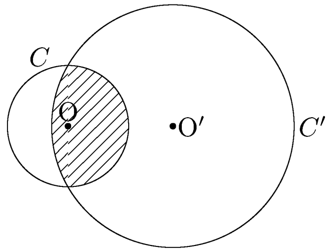
$0 \leqq \mathrm{OG} < \dfrac{1}{3}$



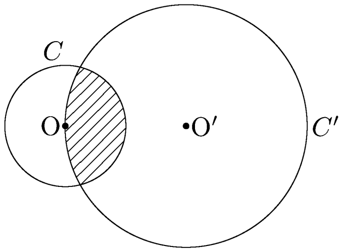
$\mathrm{OG} = \dfrac{1}{3}$



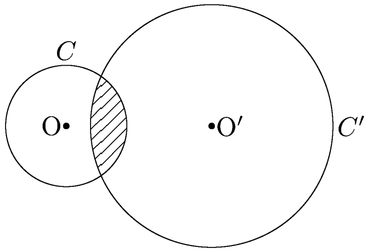
$\dfrac{1}{3} < \mathrm{OG} < \dfrac{2}{3}$



$\mathrm{OG} = \dfrac{2}{3}$



$\dfrac{2}{3} < \mathrm{OG} < 1$



(注釈 2)

ベクトルの代わりに複素数平面を用いる解法も考えられる．

数学解法コンテスト　第 16 回　解答例

問題 B

自然数全体の集合を $\mathbb{N}$ とし，n の関数 $f(n)$ を

$$f(n)=\frac{n(n+1)}{2}\ (n\in\mathbb{N})$$

で定める．$f(n)\ (n\in\mathbb{N})$ は単調増加関数であり，$f(1)=1$,

$$f(n)=\sum_{k=1}^{n}k\in\mathbb{N}\ (n\in\mathbb{N})$$
$$A\subset T\subset\mathbb{N}$$

となることに注意する．また，$n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots$ に対し，

$$f(n)-f(n-1)=n$$
$$f\bigl(f(n)\bigr)=f\bigl(f(n)-1\bigr)+f(n)$$
$$f\bigl(f(n)\bigr)\in A$$

となるから，A は無限集合である．

次に，A の要素を小さい順に $a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots$ とし，A の部分集合 $A_i\ (i=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 8)$ を

$$A_i=\left\{a_{8k+i}\,\middle|\,k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\right\}$$

で定める．$A_i\ (i=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 8)$ は明らかに無限集合であり

$$A_i\cap A_j=\varnothing\ (1\leqq i<j\leqq 8)$$
$$A=A_1\cup A_2\cup A_3\cup\cdots\cup A_8$$

(注釈 1)

A が無限集合であることは,

$$f\bigl(f(n)-1\bigr)+f(n)=f\bigl(f(n)\bigr)\in A\ (n\in\mathbb{N}\text{ かつ }n>1)$$

の代わりに，次のような式を用いても示せる．

$$(\alpha):f(3n)+f(4n+1)=f(5n+1)\in A\ (n\in\mathbb{N})$$
$$(\beta):f(8n+1)+f(16n^2+6n-1)=f(16n^2+6n+1)\in A\ (n\in\mathbb{N})$$

(注釈 2)

以下，8 を法として考える．

$$A_i=\{a\mid a\in A\text{ かつ }a\equiv i\}\ (i=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 7),\ A_8=A_0$$

とおくと，この $A_i\ (i=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 8)$ も条件を満たす．これを示すには，$A_i\ (i=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 7)$ が無限集合であることを示せばよい．示し方は色々ある．

＜ 1 つの示し方＞

$i=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 7$ に対し，単調増加関数 $f_i(n)\ (n\in\mathbb{N})$ を

$$f_i(n)=f\bigl(16(8n+i)^2+6(8n+i)+1\bigr)\qquad\bigl((\text{注釈 }1)\text{ の }(\beta)\text{ 参照}\bigr)$$

で定めると

$$2i^2+i+1\equiv f_i(n)\in A\ (n\in\mathbb{N})$$

であり,

$$f_5(n)\in A_0,\ f_0(n)\in A_1,\ f_7(n)\in A_2,\ f_2(n)\in A_3,\ f_1(n)\in A_4$$
$$f_4(n)\in A_5,\ f_3(n)\in A_6,\ f_6(n)\in A_7\ (n\in\mathbb{N})$$

よって，$A_i\ (i=0,\ 1,\ 2,\cdots,\ 7)$ は無限集合である．