数学解法コンテスト　第15回

問題A

自然数の集合を $\boldsymbol{N}$ とし，定数 $\ell \in \boldsymbol{N}$ に対し，$\boldsymbol{N}$ 上で定義された自然数値関数 $f(n)$ を

$$f(n) = (n \text{ の } \ell+1 \text{ 進法表示における各位の数字の和})\ (n = 1,\ 2,\ 3, \cdots)$$

で定める．$a \in \boldsymbol{N}$ $(1 \leqq a \leqq \ell)$, $m \in \boldsymbol{N}$ とするとき，次の3つの条件を満たす数列 $\{a_n\}$ が存在するための必要十分条件を a, m を用いて表せ.

(1) $a_1 = a,\ a_n < a_{n+1} \in \boldsymbol{N},\ f(a_{n+1}) = a_n\ (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$.

(2) 任意の $n \in \boldsymbol{N}$ に対し，$a_n < k \leqq a_{n+1}$ $(k \in \boldsymbol{N})$ かつ $f(k) = a_n$ ならば $k = a_{n+1}$ である.

(3) $a_4 = m$.

問題B

正 n 角形の頂点全体の集合を $\boldsymbol{V}$ とし，頂点がすべて $\boldsymbol{V}$ に含まれる正多角形の個数を s とする．n が p^α または $p^\alpha q^\beta$ $\big(p,\ q$ は $p < q$ である素数，$\alpha,\ \beta$ は自然数$\big)$ の形をした数であるとき，$s = n$ となる n の値をすべて求めよ.

数学解法コンテスト　第15回　解答例

問題 A

2 条件 (1), (2) を満たす数列 $\{a_n\}$ が存在すると仮定する．まず，この仮定の下で

$$(3) \iff m=(a+1)(\ell+1)^{a+1}-1 \ \cdots ①$$

となることを示す．$a_n<c\ (c\in \boldsymbol{N})$ かつ $f(c)=a_n$ となる c のうち，最小のものが a_{n+1} であることに注意しよう．さて

$$s=1\cdot(\ell+1)+a-1,\ t=a(\ell+1)+\ell,\ u=a(\ell+1)^{a+1}+\sum_{i=0}^{a}\ell(\ell+1)^i$$

とおくと

$$s=\ell+a,\ t=(a+1)\ell+a,\ u=a(\ell+1)^{a+1}+(\ell+1)^{a+1}-1=(a+1)(\ell+1)^{a+1}-1$$
$$f(s)=a,\ f(t)=s,\ f(u)=a+(a+1)\ell=t\ (a<s<t<u)$$

である．また，a_2 を $\ell+1$ 進表示したときの桁数が 1 ならば

$$a=a_1=f(a_2)=a_2$$

となるが，これは起こり得ない．したがって，$a_2=s$ である．次に，$c\leqq t$ を満たす $c\in\boldsymbol{N}$ を

$$c=c_1(\ell+1)+c_2\ \bigl(c_i\ (i=1,\ 2)\ \text{は}\ 0\leqq c_i\leqq \ell\ \text{である整数}\bigr)$$

と表示すると，$c_1\leqq a$ であり

$$f(c)=c_1+c_2\leqq a+\ell=a_2$$

ここで，$f(c)=a_2$ となるのは，$c_1=a$ かつ $c_2=\ell$，つまり $c=t$ のときである．よって，$a_3=t$ であり，同様にして $a_4=u$ もいえる．ゆえに，①は成り立つ．

あとは，(1) かつ (2) を満たす数列 $\{a_n\}$ が存在することをいえばよい．以下，この数列が次の漸化式によって定まることを数学的帰納法を用いて示す．

$$a_1=a,\ a_2=\ell+a$$
$$(*)\ a_{n+1}=a(\ell+1)^{\alpha_n}+\sum_{i=0}^{\alpha_n-1}\ell(\ell+1)^i\ \left(\text{ただし}\ \alpha_n=\frac{a_n-a}{\ell}\right)(n=2,\ 3,\ \cdots)$$

先に述べたことから，$a_2=\ell+a$, $a_3=(a+1)\ell+a$ であり

$$\alpha_2=\frac{a_2-a}{\ell}=1\in\boldsymbol{N},\ a_3=a(\ell+1)+\ell$$

したがって，$n=2$ のとき，$\alpha_n\in\boldsymbol{N}$ かつ $(*)$ が成り立つ．次に，2 以上の任意の $n\in\boldsymbol{N}$ に対し，$\alpha_n\in\boldsymbol{N}$ かつ $(*)$ が成り立つとする．このとき，$(*)$ により

$$a_{n+1}\equiv a\ (\mathrm{mod}\ \ell),\ a_{n+1}>a,\ \alpha_{n+1}\in\boldsymbol{N}\ (a_{n+1}=a+\alpha_{n+1}\ell)$$

さらに，前半の議論と同様にして

$$a_{n+2}=a(\ell+1)^{\alpha_{n+1}}+\sum_{i=0}^{\alpha_{n+1}-1}\ell(\ell+1)^i$$

もいえる．よって，2 以上のすべての $n\in\boldsymbol{N}$ に対し，$\alpha_n\in\boldsymbol{N}$ かつ $(*)$ が成り立つから，2 条件 (1), (2) を満たす数列 $\{a_n\}$ は存在する．

以上により，求める必要十分条件は

$$m=(a+1)(\ell+1)^{a+1}-1$$

【別解】

まず，(1) かつ (2) を満たす数列 $\{a_n\}$ は，次の式で定まる数列 $\{b_n\}$ に一致することを示す．

$$b_1 = a,\ b_2 = \ell + a,\ b_{n+1} = (a+1)\left\{(\ell+1)^{\frac{b_n - a}{\ell}} - 1\right\} + a\ (n = 2,\ 3,\ \cdots)$$

$a_1 = a,\ a_2 \in \boldsymbol{N},\ f(a_2) = a < a_2$ と (2) により，a_2 は $f(i) = a < i$ となる $i \in \boldsymbol{N}$ のうちで最小のものである．したがって

$$a_2 = 1 \times (\ell+1) + a - 1 = \ell + a = b_2$$

次に，$n \geqq 2$ とし，$a_n = b_n \equiv a \pmod{\ell}$ を仮定する ($n = 2$ のとき，これは成り立っている)．
$\alpha = \dfrac{b_n - a}{\ell}$ とおくと，$a < a_n$ であるから $\alpha \in \boldsymbol{N}$ であり

$$\begin{aligned} b_{n+1} &= (a+1)\{(\ell+1)^\alpha - 1\} + a \\ &= a(\ell+1)^\alpha + \sum_{i=0}^{\alpha-1} \ell \cdot (\ell+1)^i \ \cdots ① \\ &> a + \sum_{i=0}^{\alpha-1} \ell \end{aligned}$$

したがって

$$b_{n+1} \in \boldsymbol{N},\ b_{n+1} > f(b_{n+1}) = a + \alpha\ell = b_n = a_n$$

さらに

$$a_{n+1} \in \boldsymbol{N},\ f(a_{n+1}) = a_n < a_{n+1}$$

と (2), ①が成り立つことから，$a_{n+1},\ b_{n+1}$ は $f(i) = a_n < i$ となる $i \in \boldsymbol{N}$ のうち最小であるものに一致する．よって，$a_{n+1} = b_{n+1}$ である $\big(b_{n+1} \equiv a \pmod{\ell}$ も成立していることに注意$\big)$．
ゆえに，数学的帰納法により，すべての $n \in \boldsymbol{N}$ に対し，$a_n = b_n$ がいえるから，数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ は一致する．

あとは，$b_4 = m$ となるための条件を $a,\ m$ を用いて表せばよい．

$$\frac{b_2 - a}{\ell} = 1,\ b_3 = (a+1)\{(\ell+1) - 1\} + a = (a+1)\ell + a$$

$$\frac{b_3 - a}{\ell} = a + 1,\ b_4 = (a+1)\left\{(\ell+1)^{a+1} - 1\right\} + a = (a+1)(\ell+1)^{a+1} - 1$$

よって，求める条件は

$$m = (a+1)(\ell+1)^{a+1} - 1$$

数学解法コンテスト　第15回　解答例

問題B

正 n 角形 $\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2\cdots\mathrm{P}_n$ の外接円の中心を O とし，X, Y をすべての頂点が $\boldsymbol{V}$ に含まれる正 m 角形の隣接する 2 つの頂点とする ($3 \leqq m \leqq n$ に注意)．$\angle \mathrm{XOY} = \dfrac{2\pi}{m}$ は $\angle \mathrm{P}_1\mathrm{OP}_2 = \dfrac{2\pi}{n}$ の自然数倍であるから

$$\frac{2\pi}{m} = k \cdot \frac{2\pi}{n},\ \text{すなわち}\quad n = km\ (k\text{ は自然数})$$

とおける．したがって，m は n の約数であり，$k = \dfrac{n}{m}$ は n の $k \fallingdotseq n,\ k \fallingdotseq \dfrac{n}{2}$ を満たす約数である．また，条件を満たす正 m 角形は，$\left\{ \mathrm{P}_i \,\middle|\, i = 1,\ 2,\ \cdots,\ \dfrac{n}{m} \right\}$ に含まれる頂点がただ 1 つだけあるから，全部で $\dfrac{n}{m}$ 個ある．

(1) $n = 2^\alpha$ (α は 2 以上の自然数) のとき

$$s = 1 + 2 + \cdots + 2^{\alpha-2} = 2^{\alpha-1} - 1 < 2^\alpha = n\ (s \fallingdotseq n)$$

(2) $n = p^\alpha$ (p は奇素数，α は自然数) のとき

$$s = 1 + p + \cdots + p^{\alpha-1} = \frac{p^\alpha - 1}{p - 1} < p^\alpha = n\ (s \fallingdotseq n)$$

(3) $n = p^\alpha q^\beta$ ($p,\ q$ は $p < q$ である素数，$\alpha,\ \beta$ は自然数) のとき

常に正の値をとる $x,\ \ell$ の関数 $f(x,\ \ell)$ を次の式で定める．

$$f(x,\ \ell) = \frac{x^{\ell+1} - 1}{x^\ell(x-1)}\ (x > 1,\ \ell = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

x を固定すると

$$f(x,\ \ell) = \frac{1}{x-1}\left(x - \frac{1}{x^\ell}\right)\ (\ell = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

であるから，$f(x,\ \ell)$ は ℓ の単調増加関数であり，$f(x,\ \ell) < \dfrac{x}{x-1}$．

ℓ を固定すると

$$f(x,\ \ell) = \frac{1}{1 - \frac{1}{x}}\left(1 - \frac{1}{x^{\ell+1}}\right) = 1 + \frac{1}{x} + \cdots + \left(\frac{1}{x}\right)^\ell\ (x > 1)$$

であるから，$f(x,\ \ell)$ は x の単調減少関数である．

(ア) p が奇素数の場合

n の約数の総和 $S(n)$ は

$$S(n) = \left(1 + p + \cdots + p^\alpha\right)\left(1 + q + \cdots + q^\beta\right) = \frac{p^{\alpha+1} - 1}{p - 1} \cdot \frac{q^{\beta+1} - 1}{q - 1}$$

であり，$s = S(n) - n$．したがって，$s = n$ となるのは

$$2 = \frac{S(n)}{n} = \frac{p^{\alpha+1} - 1}{p^\alpha(p-1)} \cdot \frac{q^{\beta+1} - 1}{q^\beta(q-1)} = f(p,\ \alpha)f(q,\ \beta)$$

のときである．ここで

$$f(p,\ \alpha)f(q,\ \beta) \leqq f(3,\ \alpha)f(5,\ \beta) < \frac{3}{3-1} \cdot \frac{5}{5-1} = \frac{15}{8} < 2$$

よって，$s = n$ とはならない．

（イ） $p=2$ の場合

$$S(n)=\left(1+2+\cdots+2^{\alpha}\right)\left(1+q+\cdots+q^{\beta}\right)=\left(2^{\alpha+1}-1\right)\cdot\frac{q^{\beta+1}-1}{q-1}$$

であり，$s=S(n)-n-\dfrac{n}{2}$．したがって，$s=n$ となるのは

$$\frac{5}{2}=\frac{S(n)}{n}=\frac{2^{\alpha+1}-1}{2^{\alpha}}\cdot\frac{q^{\beta+1}-1}{q^{\beta}(q-1)}=f(2,\ \alpha)f(q,\ \beta)$$

のときである．$q \geqq 5$ ならば

$$f(2,\ \alpha)f(q,\ \beta)\leqq f(2,\ \alpha)f(5,\ \beta)<\frac{2}{2-1}\cdot\frac{5}{5-1}=\frac{5}{2}$$

であり，$s=n$ とはならない．したがって

$$f(2,\ \alpha)f(3,\ \beta)=\frac{5}{2}\quad\left(f(2,\ \alpha)=\frac{2^{\alpha+1}-1}{2^{\alpha}},\ f(3,\ \beta)=\frac{3^{\beta+1}-1}{2\cdot 3^{\beta}}\right)\quad\cdots①$$

を満たす $\alpha,\ \beta$ の値を求めればよい．

$\alpha \geqq 4$ ならば

$$f(2,\ \alpha)f(3,\ \beta)>f(2,\ 3)f(3,\ 1)=\frac{15}{8}\cdot\frac{4}{3}=\frac{5}{2}$$

$\Big(\beta \geqq 2$ ならば，$f(2,\ 3)f(3,\ \beta)>f(2,\ 3)f(3,\ 1)$ に注意$\Big)$

次に，$\alpha=1,\ 2$ に対し，①すなわち

$$2^{\alpha}\cdot 3^{\beta}\cdot 5=\left(2^{\alpha+1}-1\right)\left(3^{\beta+1}-1\right)\quad\cdots②$$

を満たす (自然数) β が存在するならば

$\alpha=1$ のとき　$2\cdot 3^{\beta}\cdot 5=3\left(3^{\beta+1}-1\right),\ 3^{\beta}=-3$

$\alpha=2$ のとき　$4\cdot 3^{\beta}\cdot 5=7\left(3^{\beta+1}-1\right),\ 3^{\beta}=7$

となるが，これらはいずれも起こり得ない．

以上，(1), (2), (3) により，求める n の値は

$$n=2^3\cdot 3=24$$

＜(ア) の注釈＞

$$2p^{\alpha}q^{\beta}(pq-p-q+1)=p^{\alpha+1}q^{\beta+1}-p^{\alpha+1}-q^{\beta+1}+1$$

これを変形して

$$p^{\alpha}q^{\beta}(pq-2p-2q+2)+p^{\alpha+1}+q^{\beta+1}=1$$

ここで，左辺の (　　) 内の式を T とすると

$$T=(p-2)(q-2)-2\geqq 1\ (\because\ p\geqq 3,\ q\geqq 5)$$

したがって，この場合は起こり得ない．

＜(イ) の注釈＞

$$5\cdot 2^{\alpha-1}q^{\beta}=\left(2^{\alpha+1}-1\right)\left(1+q+\cdots+q^{\beta}\right)\quad\cdots(*)$$

ここで，$2^{\alpha-1}$ と $2^{\alpha+1}-1$，q^{β} と $1+q+\cdots+q^{\beta}$ はいずれも互いに素であるから

$$2^{\alpha+1}-1=xq^{\beta},\ 1+q+\cdots+q^{\beta}=2^{\alpha-1}y$$

$$\Big((x,\ y)=(1,\ 5)\ \text{または}\ (5,\ 1)\Big)$$

$$4\left(1+q+\cdots+q^{\beta}\right)=2^{\alpha+1}y=\left(1+xq^{\beta}\right)y$$

$$4\equiv y\ (\mathrm{mod}\ q)$$

(i) $(x,\ y)=(1,\ 5)$ のとき

$$1 \equiv 0 \pmod{q} \qquad (\text{これは起こり得ない})$$

(ii) $(x,\ y)=(5,\ 1)$ のとき

$3 \equiv 0 \pmod{q}$ であるから $q=3$ であり

$$2^{\alpha+1}-1=5\cdot 3^{\beta},\ 1+3+\cdots+3^{\beta}=2^{\alpha-1}$$

$$5\cdot 2^{\alpha}=5\cdot 2\left(1+3+\cdots+3^{\beta}\right)=5\left(3\cdot 3^{\beta}-1\right)=3\left(2^{\alpha+1}-1\right)-5$$

$$2^{\alpha}=8=2^3,\ \alpha=3,\ 1+3+\cdots+3^{\beta}=4,\ \beta=1$$

よって，$n=2^3\cdot 3=24$ $\quad$ (このとき, $(*)$ は成り立つ).

あるいは，$(*)$ を次のように変形して利用してもよい.

$$5(q-1)\cdot 2^{\alpha-1}q^{\beta}=\left(2^{\alpha+1}-1\right)\left(q^{\beta+1}-1\right)$$

$$(q-5)\cdot 2^{\alpha-1}q^{\beta}+2^{\alpha+1}+q^{\beta+1}=1$$

したがって，$q-5<0$ であるから $q=3$ であり

$$2^{\alpha}3^{\beta}+2\cdot 2^{\alpha}+3\cdot 3^{\beta}=1$$

$$\left(2^{\alpha}-3\right)\left(3^{\beta}-2\right)=5 \qquad \left(3^{\beta}-2>0 \text{ に注意}\right)$$

$$\left(2^{\alpha}-3,\ 3^{\beta}-2\right)=(1,\ 5) \text{ または } (5,\ 1)$$

(以下略)