数学解法コンテスト　第16回　解答例

問題B

自然数全体の集合を $\mathbb{N}$ とし，n の関数 $f(n)$ を

$$f(n)=\frac{n(n+1)}{2}\ (n\in\mathbb{N})$$

で定める．$f(n)\ (n\in\mathbb{N})$ は単調増加関数であり，$f(1)=1$,

$$f(n)=\sum_{k=1}^{n}k\in\mathbb{N}\ (n\in\mathbb{N})$$

$$A\subset T\subset\mathbb{N}$$

となることに注意する．また，$n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots$ に対し，

$$f(n)-f(n-1)=n$$

$$f\bigl(f(n)\bigr)=f\bigl(f(n)-1\bigr)+f(n)$$

$$f\bigl(f(n)\bigr)\in A$$

となるから，A は無限集合である．

次に，A の要素を小さい順に $a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots$ とし，A の部分集合 $A_i\ (i=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 8)$ を

$$A_i=\left\{a_{8k+i}\,\middle|\,k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\right\}$$

で定める．$A_i\ (i=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 8)$ は明らかに無限集合であり

$$A_i\cap A_j=\varnothing\ (1\leqq i<j\leqq 8)$$

$$A=A_1\cup A_2\cup A_3\cup\cdots\cup A_8$$

(注釈 1)

A が無限集合であることは,

$$f\bigl(f(n)-1\bigr)+f(n)=f\bigl(f(n)\bigr)\in A\ (n\in\mathbb{N}\text{ かつ }n>1)$$

の代わりに，次のような式を用いても示せる．

$$(\alpha):f(3n)+f(4n+1)=f(5n+1)\in A\ (n\in\mathbb{N})$$

$$(\beta):f(8n+1)+f(16n^2+6n-1)=f(16n^2+6n+1)\in A\ (n\in\mathbb{N})$$

(注釈 2)

以下，8 を法として考える．

$$A_i=\{a\mid a\in A\text{ かつ }a\equiv i\}\ (i=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 7),\ A_8=A_0$$

とおくと，この $A_i\ (i=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 8)$ も条件を満たす．これを示すには，$A_i\ (i=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 7)$ が無限集合であることを示せばよい．示し方は色々ある．

＜1つの示し方＞

$i=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 7$ に対し，単調増加関数 $f_i(n)\ (n\in\mathbb{N})$ を

$$f_i(n)=f\bigl(16(8n+i)^2+6(8n+i)+1\bigr)\qquad\bigl(\text{(注釈 1) の }(\beta)\text{ 参照}\bigr)$$

で定めると

$$2i^2+i+1\equiv f_i(n)\in A\ (n\in\mathbb{N})$$

であり,

$$f_5(n)\in A_0,\ f_0(n)\in A_1,\ f_7(n)\in A_2,\ f_2(n)\in A_3,\ f_1(n)\in A_4$$

$$f_4(n)\in A_5,\ f_3(n)\in A_6,\ f_6(n)\in A_7\ (n\in\mathbb{N})$$

よって，$A_i\ (i=0,\ 1,\ 2,\cdots,\ 7)$ は無限集合である．