# 数学解法コンテスト　第16回　解答例

問題 A

Pを平面上の点とする．Pが特に問題文の条件をみたす動点のとき，Pの通過領域を$D$とする．

まず，次の条件$(\alpha)$, $(\beta)$が同値であることを示す．

$(\alpha)$　P$\in D$

$(\beta)$　Pは$C$の内部にあるGと異なる点であり，次の式で定まる点Mも$C$の内部にある．

$$\overrightarrow{\mathrm{OM}}=\frac{3\overrightarrow{\mathrm{OG}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}}}{2}$$

$(\alpha)\Longrightarrow(\beta)$：条件を満たす三角形の3頂点をP, Q, Rとする．Gはこの三角形の重心であるからP$\neq$Gである．また，P, Q, Rは$C$の内部にあり，

$$\overrightarrow{\mathrm{OM}}=\frac{\left(\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{OQ}}+\overrightarrow{\mathrm{OR}}\right)-\overrightarrow{\mathrm{OP}}}{2}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{OQ}}+\overrightarrow{\mathrm{OR}}}{2}$$

が成り立つ．したがって，Mは線分QRの中点であり，$C$の内部にある．$\big((\beta)$ 成立$\big)$

$(\beta)\Longrightarrow(\alpha)$：

$$\overrightarrow{\mathrm{PM}}=\overrightarrow{\mathrm{OM}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{3\left(\overrightarrow{\mathrm{OG}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right)}{2}=\frac{3}{2}\overrightarrow{\mathrm{PG}}\neq\vec{0}$$

が成り立つからP$\neq$Mであり，Gは線分PMを$2:1$に内分する点である．

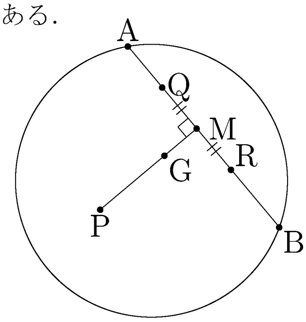
次に，Mを通る$C$の弦ABを

　AB$\perp$PM，MA$\leqq$MB

を満たすようにとり，異なる2点Q, Rを

$$\overrightarrow{\mathrm{MQ}}=\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{MA}},\quad \overrightarrow{\mathrm{MR}}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{MA}}$$

で定める．Q, Rは$C$の内部にあり，Mは線分QRの中点である．したがって，P, Q, Rは$C$の内部に含まれる三角形の3頂点であり，Gはこの三角形の重心である．$\big((\alpha)$ 成立$\big)$




$(\alpha)$, $(\beta)$は同値であるから

$$\mathrm{P}\in D\iff \text{Pは}C\text{の内部にあるGと異なる点であり，}\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}-3\overrightarrow{\mathrm{OG}}\right|<2\text{を満たす．}$$

よって，点O$'$を$\overrightarrow{\mathrm{OO'}}=3\overrightarrow{\mathrm{OG}}$で定め，O$'$を中心とする半径2の円を$C'$とすると

$$D=\{\mathrm{P}\mid \mathrm{P}\in(C\text{の内部})\cap(C'\text{の内部})\ \text{かつ}\ \mathrm{P}\neq\mathrm{G}\}$$

ここで，$C$と$C'$が異なる2点で交わるための条件は

$$2-1<\mathrm{OO'}=3\mathrm{OG}<2+1\quad\text{すなわち}\quad\frac{1}{3}<\mathrm{OG}<1$$

Gの定め方から$0\leqq\mathrm{OG}<1$であり，$0\leqq\mathrm{OG}\leqq\dfrac{1}{3}$のときは$(C$の内部$)\subset(C'$の内部$)$となることに注意する．

以上により，求める通過領域は

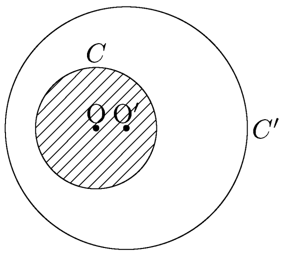
$$\begin{cases}0\leqq\mathrm{OG}\leqq\dfrac{1}{3}\text{のとき}\quad C\text{の内部（ただし，点Gは除く）}\\[2mm] \dfrac{1}{3}<\mathrm{OG}<1\text{のとき}\quad C\text{の内部と}C'\text{の内部の共通部分（ただし，点Gは除く）}\end{cases}$$

($C'$は線分OGを$3:2$に外分する点を中心とする半径2の円)

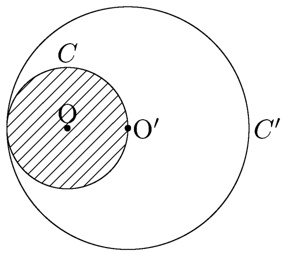
(注釈 1)

$D$ を図示すると，次の図の斜線部分 (境界を除く) となる．

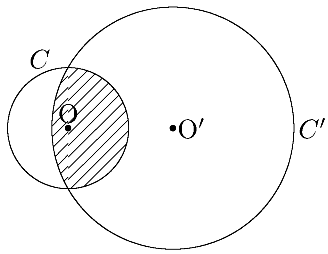
$0 \leqq \mathrm{OG} < \dfrac{1}{3}$



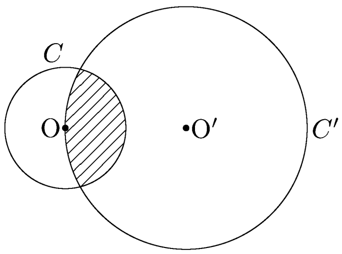

$\mathrm{OG} = \dfrac{1}{3}$



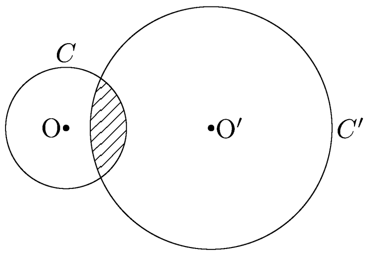

$\dfrac{1}{3} < \mathrm{OG} < \dfrac{2}{3}$




$\mathrm{OG} = \dfrac{2}{3}$




$\dfrac{2}{3} < \mathrm{OG} < 1$




(注釈 2)

ベクトルの代わりに複素数平面を用いる解法も考えられる．