第 1 問 (必答問題) (配点 30)

〔1〕

$(2a+4b-2)x^2+(5a+11)x-b-8=0$ ……①

(1) $(4x^2-1)b+16x-8$ ……②

② を因数分解すると

$$\begin{aligned}(4x^2-1)b+16x-8&=(2x+1)(2x-1)b+8(2x-1)\\&=(2x-1)\{(2x+1)b+8\}\\&=(2x-1)(^{ア}2bx+b+{}^{イ}8)\end{aligned}$$

(2) $b=2$ であるから，① の左辺は

$(2a+6)x^2+(5a+11)x-10$ ……③

となる。

(ⅰ) ③ を a に着目して因数分解すると

$$\begin{aligned}(2a+6)x^2+(5a+11)x-10&=(2x^2+5x)a+(6x^2+11x-10)\\&=x(2x+5)a+(2x+5)(3x-2)\\&=(2x+5)\{ax+(3x-2)\}\\&=(^{ウ}2x+{}^{エ}5)\{(a+{}^{オ}3)x-{}^{カ}2\}\end{aligned}$$

(ⅱ) $a=2\sqrt{2}$ のとき，① は (ⅰ) より

$(2x+5)\{(2\sqrt{2}+3)x-2\}=0$

となる。

よって，① の解は

$x=-\dfrac{5}{2}$ または $x=\dfrac{2}{2\sqrt{2}+3}={}^{キ}6-{}^{ク}4\sqrt{2}$

(ⅲ)

[1] $a=-3$ のとき

① は $-4x-10=0$ となるから，① の解は $x=-\dfrac{5}{2}$ のみである。

したがって，命題「$a=-3$ ならば，① の解が $x=-\dfrac{5}{2}$ だけである。」は真である。

[2] $a\fallingdotseq-3$ のとき

2 次方程式 $(2x+5)\{(a+3)x-2\}=0$ の解は $x=-\dfrac{5}{2}$ または $x=\dfrac{2}{a+3}$ である。

$\dfrac{2}{a+3}=-\dfrac{5}{2}$ つまり $a=-\dfrac{19}{5}$ のとき，① は重解 $x=-\dfrac{5}{2}$ をもつ。

よって，命題「① の解が $x=-\dfrac{5}{2}$ だけであるならば，$a=-3$ である。」の反例は，

$a=-\dfrac{19}{5}$ であるから，この命題は偽である。

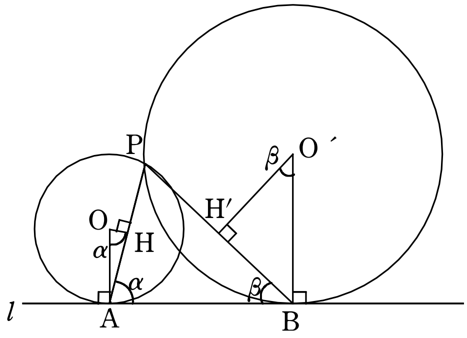
[1][2] より， $a=-3$ であることは，① の解が $x=-\dfrac{5}{2}$ だけであるための十分条件

であるが，必要条件ではない。(^{ケ} ⓪)

第 1 問　(必答問題)　(配点　30)

〔2〕

(1)　$\angle \mathrm{PAB} = \alpha$，$\angle \mathrm{PBA} = \beta$ とおく。



円 O の中心 O から直線 PA に引いた垂線と直線 PA との交点を H とする。

$\angle \mathrm{OAB} = 90^\circ$ であるから，$\angle \mathrm{AOH} = \alpha$ である。よって，△ OAH に着目すると

$$\mathrm{AH} = \mathrm{OA}\sin\alpha = {}^{\text{コ}}2\sin\alpha$$

であるから

$$\mathrm{PA} = 2\mathrm{AH} = {}^{\text{サ}}4\sin\alpha \quad \cdots\cdots ①$$

である。

円 O′ の中心 O′ から直線 PB に引いた垂線と直線 PBとの交点をH′とする。

$\angle \mathrm{O'BA} = 90^\circ$ であるから，$\angle \mathrm{BO'H'} = \beta$ である。よって，△ O′BH′に着目すると

$$\mathrm{BH'} = \mathrm{O'B}\sin\beta = 4\sin\beta$$

であるから

$$\mathrm{PB} = 2\,\mathrm{BH'} = {}^{\text{シ}}8\sin\beta \quad \cdots\cdots ②$$

であることもわかる。

また，△ PAB の外接円の半径を R_1 とすると，正弦定理により

$$\frac{\mathrm{PA}}{\sin\angle\mathrm{PBA}} = \frac{\mathrm{PB}}{\sin\angle\mathrm{PAB}} = 2R_1$$

$$\frac{\mathrm{PA}}{\sin\beta} = \frac{\mathrm{PB}}{\sin\alpha} = 2R_1 \quad \cdots\cdots ③ \qquad ({}^{\text{ス}}①,\ {}^{\text{セ}}⓪)$$

が成り立つので

$$\mathrm{PA}\sin\alpha = \mathrm{PB}\sin\beta$$

である。この式に，① と ② を代入することにより

$$4\sin\alpha\cdot\sin\alpha = 8\sin\beta\cdot\sin\beta$$

$$\sin^2\alpha = 2\sin^2\beta$$

となる。ここで，$0^\circ < \alpha < 90^\circ$，$0^\circ < \beta < 180^\circ$ であるから，$\sin\alpha > 0$，$\sin\beta > 0$ である。よって

$$\sin\alpha = \sqrt{{}^{\text{ソ}}2}\,\sin\beta$$

となる。また

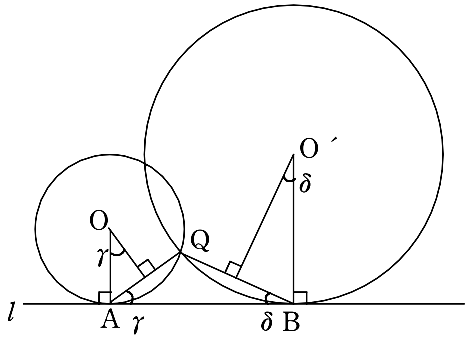
$$\frac{\mathrm{PB}}{\mathrm{PA}} = \frac{8\sin\beta}{4\sqrt{2}\sin\beta} = \sqrt{2} \qquad \text{すなわち} \qquad \mathrm{PB} = \sqrt{2}\,\mathrm{PA}$$

となることがわかる。さらに ③ より

$$R_1 = \frac{\mathrm{PB}}{2\sin\alpha} = \frac{8\sin\beta}{2\cdot\sqrt{2}\sin\beta} = {}^{\text{タ}}2\sqrt{{}^{\text{チ}}2}$$

が得られる。

第 1 問　(必答問題)　(配点　30)



(2)　△ QAB の外接円の半径を R_2 とおく。
太郎さんと花子さんの会話から，R_2 を
(1) を参考に導出する。
$\angle \mathrm{QAB} = \gamma$，$\angle \mathrm{QBA} = \delta$ とおく。
(1) と同様に

$\mathrm{QA} = 4\sin\gamma$　……… ④

$\mathrm{QB} = 8\sin\delta$　……… ⑤

である。また，△ QAB において，
正弦定理により

$$\frac{\mathrm{QA}}{\sin\angle \mathrm{QBA}} = \frac{\mathrm{QB}}{\sin\angle \mathrm{QAB}} = 2R_2$$

$$\frac{\mathrm{QA}}{\sin\delta} = \frac{\mathrm{QB}}{\sin\gamma} = 2R_2 \quad \cdots\cdots ⑥$$

が成り立つので

$$\mathrm{QA}\sin\gamma = \mathrm{QB}\sin\delta$$

である。この式に，④ と ⑤ を代入することにより

$$4\sin\gamma\cdot\sin\gamma = 8\sin\delta\cdot\sin\delta$$

$$\sin^2\gamma = 2\sin^2\delta$$

となる。ここで，$0° < \gamma < 180°$，$0° < \delta < 180°$ であるから，$\sin\gamma > 0$，$\sin\delta > 0$
である。よって

$$\sin\gamma = \sqrt{2}\sin\delta$$

となる。さらに ⑥ より

$$R_2 = \frac{\mathrm{PB}}{2\sin\gamma} = \frac{8\sin\delta}{2\cdot\sqrt{2}\sin\delta} = 2\sqrt{2}$$

が得られる。このことから，$R_1 = R_2$ (ツ ①) が得られる。また，△ PAB および
△ QAB において，正弦定理により

$$\frac{\mathrm{AB}}{\sin\angle \mathrm{APB}} = 2R_1 \quad \text{すなわち} \quad \sin\angle \mathrm{APB} = \frac{\mathrm{AB}}{2R_1}$$

$$\frac{\mathrm{AB}}{\sin\angle \mathrm{AQB}} = 2R_2 \quad \text{すなわち} \quad \sin\angle \mathrm{AQB} = \frac{\mathrm{AB}}{2R_2}$$

である。これと $R_1 = R_2$ より，$\sin\angle \mathrm{APB} = \sin\angle \mathrm{AQB}$　(テ ①) であることもわかる。

第 1 問　(必答問題)　(配点　30)

(3)　$\mathrm{AB}=2\sqrt{7}$ のとき

$$\sin\angle\mathrm{APB}=\frac{\mathrm{AB}}{2R_1}=\frac{2\sqrt{7}}{2\cdot2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{{}^{\text{トナ}}14}}{{}^{\text{ニ}}4}$$

である。また，$\sin^2\angle\mathrm{APB}+\cos^2\angle\mathrm{APB}=1$ により

$$\cos^2\angle\mathrm{APB}=1-\left(\frac{\sqrt{14}}{4}\right)^2=\frac{2}{16}$$

である。ここで，$\angle\mathrm{APB}<\angle\mathrm{AQB}$ と $\sin\angle\mathrm{APB}=\sin\angle\mathrm{AQB}$ より，

$\angle\mathrm{AQB}=180^\circ-\angle\mathrm{APB}$ である。$\angle\mathrm{APB}<\angle\mathrm{AQB}$ より

$$\angle\mathrm{APB}<180^\circ-\angle\mathrm{APB}\qquad\text{すなわち}\qquad\angle\mathrm{APB}<90^\circ$$

となる。これと $0^\circ<\angle\mathrm{APB}<180^\circ$ より，$0^\circ<\angle\mathrm{APB}<90^\circ$ となる。これより，

$\cos\angle\mathrm{APB}>0$ であるから

$$\cos\angle\mathrm{APB}=\sqrt{\frac{2}{16}}=\frac{\sqrt{2}}{4}$$

となる。

(1) より，$\mathrm{PB}=\sqrt{2}\,\mathrm{PA}$ であるから，$\mathrm{PA}=x$ とおくと，$\mathrm{PB}=\sqrt{2}\,x$ となる。

$\triangle\mathrm{PAB}$ において，余弦定理により

$$\mathrm{AB}^2=\mathrm{PA}^2+\mathrm{PB}^2-2\cdot\mathrm{PA}\cdot\mathrm{PB}\cdot\cos\angle\mathrm{APB}$$

$$(2\sqrt{7})^2=x^2+(\sqrt{2}\,x)^2-2\cdot x\cdot\sqrt{2}\,x\cdot\frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$28=2x^2\qquad\text{すなわち}\qquad x^2=14$$

である。$x>0$ より

$$\mathrm{PA}=x=\sqrt{{}^{\text{ヌネ}}14}$$

である。

第 2 問 (必答問題) (配点　30)

〔1〕

(1)　C_1 ： $y=ax^2+bx+c$ は点 (0 , 1) を通るため　　$1=0\cdot a+0\cdot b+c$

よって　　$c={}^{ア}1$

また，このとき C_1 は 2 点 $\left(-\dfrac{5}{2},\ 0\right)$， $\left(\dfrac{1}{2},\ 0\right)$ を通るため，以下の 2 式が成立する。

$$\frac{25}{4}a-\frac{5}{2}b+1=0 \quad , \quad \frac{1}{4}a+\frac{1}{2}b+1=0$$

これを解いて　　$a=-\dfrac{4}{5}$　，　$b=-\dfrac{8}{5}$

よって　C_1 ： $y=-\dfrac{{}^{イ}4}{{}^{ウ}5}x^2-\dfrac{{}^{エ}8}{{}^{オ}5}x+1$　となる。

これを変形して　$y=-\dfrac{4}{5}(x+1)^2+\dfrac{9}{5}$　より C_1 の頂点の y 座標は　$y=\dfrac{{}^{カ}9}{{}^{キ}5}$

同様に， C_3 をグラフにもつ 2 次関数を求めると　　$y=-\dfrac{4}{5}(x-1)^2+\dfrac{9}{5}$

ここで， C_1， C_3 の頂点の座標は順に $\left(-1,\ \dfrac{9}{5}\right)$， $\left(1,\ \dfrac{9}{5}\right)$ となり，これらは y 軸対称な点である。すなわち，これら 2 点を通る C_2 は y 軸対称な放物線であり，その方程式は p, q を実数（ $p\neq 0$ ）として　　$y=px^2+q$　とおける。

C_2 は 2 点 $\left(\dfrac{3}{2},\ 0\right)$， $\left(1,\ \dfrac{9}{5}\right)$ を通るため，以下の 2 式が成り立つ.

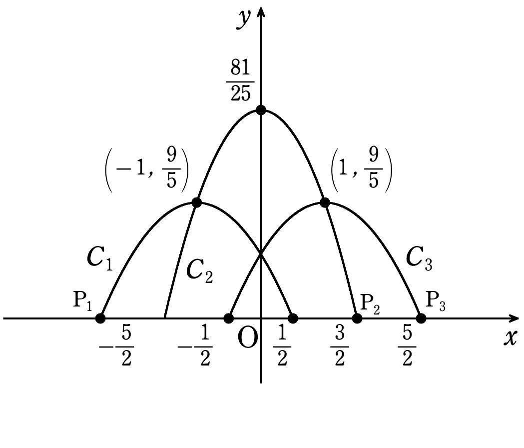
$$\frac{9}{4}p+q=0 \quad , \quad p+q=\frac{9}{5}$$

これを解いて　　$p=-\dfrac{36}{25}$　，　$q=\dfrac{81}{25}$　（ $p\neq 0$ を満たす）

よって， C_2 の頂点の y 座標は　$y=\dfrac{{}^{クケ}81}{{}^{コサ}25}$

このとき，大きな噴水の高さ $\dfrac{81}{25}$ は小さな噴水の高さ $\dfrac{9}{5}$ の　$\dfrac{81}{25}\div\dfrac{9}{5}=\dfrac{9}{5}=1.8$　倍

よって，約 2 倍である。（ ^{シ} ⓪ ）



第 2 問 (必答問題) (配点 30)

(2) 仮定 1 及び仮定 2′ より，$C_2{}'$ をグラフにもつ 2 次関数の方程式は，m を実数（$m \fallingdotseq 0$）

として $\quad y=mx^2+5 \quad$ とおける。

これが C_3 の頂点 $\left(1,\ \dfrac{9}{5}\right)$ を通るとき $\quad m+5=\dfrac{9}{5} \quad$ が成り立つ。

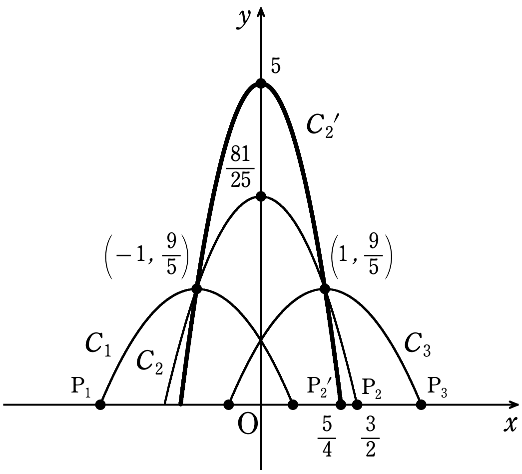
これを解いて $\quad m=-\dfrac{16}{5}$

すなわち，$C_2{}'$ をグラフにもつ 2 次関数の方程式は $\quad y=-\dfrac{16}{5}x^2+5 \quad$ である。

$\mathrm{P}_2{}'$ は，$C_2{}'$ と x 軸の交点のうち $x>0$ を満たすものであり，その x 座標は

$$-\frac{16}{5}x^2+5=0 \quad \text{を解いて} \quad x=\frac{5}{4}$$

したがって，$\mathrm{P}_2{}'$ は P_2 より $\quad \dfrac{3}{2}-\dfrac{5}{4}=\dfrac{^{ス}1}{^{セ}4} \quad$ だけ P_1 側にある。（^{ソ} ⓪ ）



第 2 問 [2]（必答問題）（配点　30）

(1)(i)　(a)　外国人宿泊数が 100 を超え，かつ日本人宿泊数が2500を超える都道府県の数は 2 であるから正。

(b)　点線の右下にあるのは 1 点のみで，$\frac{1}{47}<\frac{50}{100}$ となり全体の 50% 未満であるから正。

よって(a)，(b)の正誤の組合せとして正しいものは (タ ⓪) である。

(ii)　第 1 四分位数 Q_1 は小さい方から 12 番目で，第 3 四分位数 Q_3 は小さい方から 36 番目であるから $Q_1=351$，$Q_3=1251$ となる。

よって四分位範囲は　$Q_3-Q_1=1251-351=900$（ チ ④ ）

$$Q_1-1.5\times(Q_3-Q_1)=351-1350=-999,$$

$$Q_3+1.5\times(Q_3-Q_1)=1251+1350=2601$$　となるから，

令和 4 年の外国人宿泊者数と日本人宿泊者数の両方で外れ値となる都道府県の数は P45，P46，P47 の ツ 3 である。

(2)　$z_i-\overline{z}=(x_i-\overline{x})+(y_i-\overline{y})$　$(i=1,2,\cdots\cdots,47)$ であるから

$(z_i-\overline{z})^2=\{(x_i-\overline{x})+(y_i-\overline{y})\}^2=(x_i-\overline{x})^2+2(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})+(y_i-\overline{y})^2$　となり，

$$s_x{}^2=\frac{1}{47}\{(x_1-\overline{x})^2+(x_2-\overline{x})^2+\cdots\cdots+(x_{47}-\overline{x})^2\},$$

$$s_y{}^2=\frac{1}{47}\{(y_1-\overline{y})^2+(y_2-\overline{y})^2+\cdots\cdots+(y_{47}-\overline{y})^2\},$$

$$s_{xy}=\frac{1}{47}\{(x_1-\overline{x})(y_1-\overline{y})+(x_2-\overline{x})(y_2-\overline{y})+\cdots\cdots+(x_{47}-\overline{x})(y_{47}-\overline{y})\}$$　から

$$s_z{}^2=\frac{1}{47}\{(z_1-\overline{z})^2+(z_2-\overline{z})^2+\cdots\cdots+(z_{47}-\overline{z})^2\}$$

$$=\frac{1}{47}\{(x_1-\overline{x})^2+(x_2-\overline{x})^2+\cdots\cdots+(x_{47}-\overline{x})^2\}$$

$$+\frac{1}{47}\{2(x_1-\overline{x})(y_1-\overline{y})+2(x_2-\overline{x})(y_2-\overline{y})+\cdots\cdots+2(x_{47}-\overline{x})(y_{47}-\overline{y})\}$$

$$+\frac{1}{47}\{(y_1-y)^2+(y_2-\overline{y})^2+\cdots\cdots+(y_{47}-\overline{y})^2\}$$

$$=\frac{1}{47}\{(x_1-\overline{x})^2+(x_2-\overline{x})^2+\cdots\cdots+(x_{47}-\overline{x})^2\}$$

$$+\frac{2}{47}\{(x_1-\overline{x})(y_1-\overline{y})+(x_2-\overline{x})(y_2-\overline{y})+\cdots\cdots+(x_{47}-\overline{x})(y_{47}-\overline{y})\}$$

$$+\frac{1}{47}\{(y_1-y)^2+(y_2-\overline{y})^2+\cdots\cdots+(y_{47}-\overline{y})^2\}$$

$=s_x{}^2+2s_{xy}+s_y{}^2$（ テ ④ ）

x と y には正の相関があるから $s_{xy}>0$ となり

$$s_z{}^2=s_x{}^2+2s_{xy}+s_y{}^2>s_x{}^2+s_y{}^2 \ (^{ト}⓪)$$

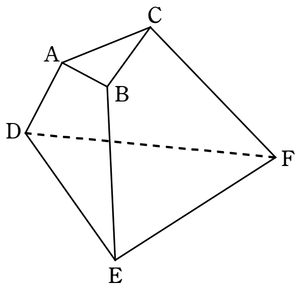
(3)　実験結果を用いると 35 枚の硬貨のうち 23 枚以上が表となった割合は

$$2.4+0.9+0.5+0.4+0.1={}^{ナニ}4.3\%$$

これを 35 人のうち 23 人以上が「キャンペーン A のほうがよい」と回答する確率とみなすと，4.3%＜5% になるから，**方針**に従うと“「キャンペーン A のほうがよい」と回答する割合と「キャンペーン B のほうがよい」と回答する割合は等しい”という仮説は誤っていると判断する。（ヌ⓪）

したがって，今回のアンケート結果からは，キャンペーン A の方がよいと思っている人が多いといえる。（ネ⓪）

第 3 問　(必答問題)　(配点　20)



(1)　AD は平面 ABED と平面 ACFD の両方に含まれる直線である。すなわち，AD は平面 ABED と平面 ACFD との交線である。よって，ア ②

また，BE は平面 ABED と平面 BCFE の両方に含まれる直線である。すなわち，BE は平面 ABED と平面 BCFE との交線である。よって，イ ③

(2)(i)　△PAB と △PED について，円に内接する四角形において 1 つの内角とその対角の外角は等しいから ∠PAB＝∠PED ，∠PBA＝∠PDE

2 組の角がそれぞれ等しいから，△PAB∽△PED

その相似比は AB：ED＝3：9＝1：ウ3

相似な図形で対応する辺の比は等しいから

PA：PE＝1：3

よって，3PA＝PE＝PB＋BE＝PB＋エオ11 … ①

同様にして，3PB＝PD＝PA＋AD＝PA＋カ7 … ② が成り立つ。

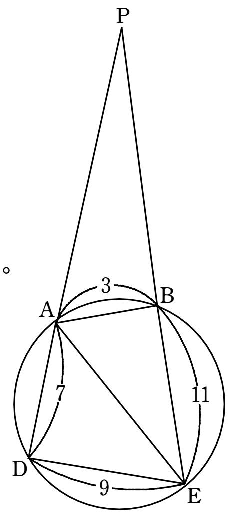
① より PB＝3PA－11 … ③

これを ② に代入して

3(3PA－11)＝PA＋7

これを解いて PA＝キ5

③ より PB＝ク4



(ii)　平面 BCFE と球面 S が交わってできる円を C とする。

円 C と直線 PE，PF について，方べきの定理より

PB･PE＝PC･PF

PB＝4，PE＝15，PF＝PC＋17 であるから，代入して計算し PC＞0 であることに注意すると　　PC＝ケ3

(2)(i)と同様にすると △PBC∽△PFE がわかるから

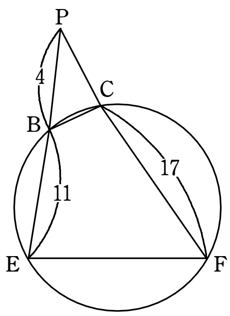
CB：EF＝PB：PF＝4：20＝1：5

CB＝3 より，EF＝コサ15

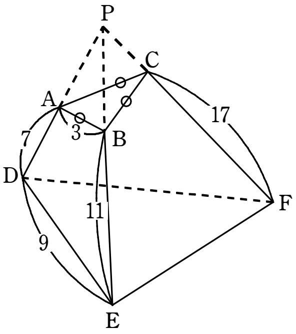
また，同様にして △PCA∽△PDF であるから

CA：DF＝PC：PD＝3：12＝1：4

CA＝3 より，DF＝シス12



第 3 問 (必答問題) (配点　20)



(iii) △PDEにおいて，PD＝12，DE＝9，PE＝15 から， $PE^2=PD^2+DE^2$ が成り立つ。よって，三平方の定理の逆から ∠PDE＝90°，すなわち ∠ADE＝90° … ④

△PDF において，最大辺 PF＝20，また PD＝12，DF＝12 から

$$PF^2>PD^2+DF^2$$

よって， ∠PDF は鈍角である。すなわち ∠ADF は鈍角 … ⑤

また， △DEF において， DE＝9，EF＝15，FD＝12 から， $EF^2=DE^2+FD^2$ が成り立つ。よって，三平方の定理の逆から ∠EDF＝90° … ⑥

(a) FD，PD は直線 DE に対し垂直に交わるから， ∠PDF は平面 ABED と平面 DEF のなす角である。⑤ より(a) は偽。

(b) ④，⑥ より直線 DE は交わる 2 直線 DP，DF に垂直であるから，直線 DE は平面 ACFD に垂直である。よって，(b) は真。

(c) (b) より直線 DE は平面 ACFD に垂直であるから，直線 DE は平面 ACFD 上のすべての直線と垂直である。AC は平面 ACFD 上の直線であるから，(c)は真。

以上より， セ ④

第 4 問 (必答問題) (配点 20)

(1)

1 回目に当たりが出るという事象を A,

1 回目に当たりが出ず，かつ 2 回目に当たりが出るという事象を B,

1 回目，2 回目ともに当たりが出ず，かつ 3 回目に当たりが出るという事象を C とする。

A と B は互いに排反であるから，求める確率は

$$P(A\cup B)=\frac{3}{16}+\frac{1}{8}=\frac{^{ア}5}{_{イウ}16}$$

1 回目，2 回目ともに当たりがでないという事象は，$A\cup B$ の余事象であるから，求める確率は

$$P(\overline{A\cup B})=1-P(A\cup B)=1-\frac{5}{16}=\frac{^{エオ}11}{_{カキ}16}$$

同様にして，$P(A\cup B\cup C)=\frac{3}{16}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}=\frac{3}{8}$ であるから，1 回も当たりが出ない確率は

$$1-P(A\cup B\cup C)=1-\frac{3}{8}=\frac{^{ク}5}{_{ケ}8}$$

(2)

(ｉ) 表を完成させると下のようになる。

X	0	1200	計
確率	$\frac{5}{8}$	$\frac{3}{8}$	1

よって，数量 X の期待値は

$$0\times\frac{5}{8}+1200\times\frac{3}{8}={}^{コサシ}450$$

(ii) (ｉ) で求めた数量 X の期待値 450 円は参加料の金額 500 円未満である。(ス ⓪)

したがって，主催者は参加料 500 円という設定について妥当であると判断する。(セ ⓪)

(3)

(ｉ) 表を完成させると下のようになる。

Y	170	340	510	計
確率	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{11}{16}$	1

よって，数量 Y の期待値は

$$170\times\frac{3}{16}+340\times\frac{1}{8}+510\times\frac{11}{16}={}^{ソタチ}425$$

(ii) (2) の (ｉ) で求めた 数量 X の期待値 450 円は，$a=170$ と設定した場合の**支払い方法 2** で参加者が支払う参加料である数量 Y の期待値 425 円以上である。(ツ ①)

したがって，主催者はくじ引き料 170 円という設定について妥当ではないと判断する。(テ ①)

くじ引き料を a 円とすると，表は下のようになる。

第 4 問　(必答問題)　(配点　20)

Y	a	$2a$	$3a$	計
確率	$\dfrac{3}{16}$	$\dfrac{1}{8}$	$\dfrac{11}{16}$	1

よって，数量 Y の期待値は

$$a\times\frac{3}{16}+2a\times\frac{1}{8}+3a\times\frac{11}{16}=\frac{5}{2}a$$

これが数量 X の期待値 450 円より大きければ，主催者はくじ引き料の設定が妥当であると判断する。すなわち

$$\frac{5}{2}a>450$$

したがって　　$a>{}^{トナニ}180$