第 1 問 (必答問題) (配点　15)

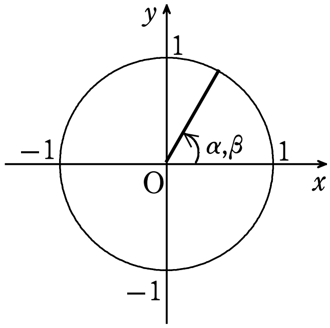
(1)　$\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{6}\right)=\sin 2\theta \cdots①\ (0\leqq\theta<\pi)$

$\alpha=\theta+\dfrac{\pi}{6}$，$\beta=2\theta$ とおくと，① は　$\sin\alpha=\sin\beta\cdots②$ と表せる。

(i)　$\alpha=\beta$ を解くと

$$\theta+\frac{\pi}{6}=2\theta$$

$$\theta=\frac{\pi}{{}^{ア}6}\ (0\leqq\theta<\pi \text{ を満たす})$$



このとき

$$\sin\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)=\sin 2\theta=\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{{}^{イ}3}}{{}^{ウ}2}$$

(ii)　点 P の y 座標は $\sin\alpha$，点 Q の y 座標は $\sin\beta$ であるから，② が成り立つとき，点 P の y 座標と，点 Q の y 座標が等しい。(^{エ}⓶)

(iii)　$\theta\neq\dfrac{\pi}{6}$ とする。

・$0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}$ の場合

$\alpha>\beta$ すなわち $0\leqq\theta<\dfrac{\pi}{6}$ のとき，$\dfrac{\pi}{6}\leqq\alpha<\dfrac{\pi}{3}$，$0\leqq\beta<\dfrac{\pi}{3}$ であり，点 P，点 Q はともに第 1 象限にある。第 1 象限において点 P，Q の y 座標が一致するのは $\theta=\dfrac{\pi}{6}$ のときであるから，$\alpha>\beta$ のとき ① は成り立たない。

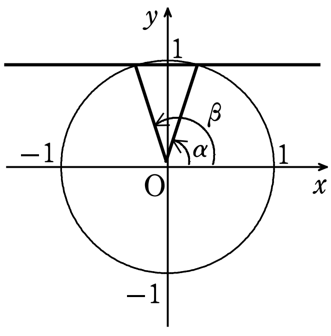
$\alpha<\beta$ すなわち $\dfrac{\pi}{6}<\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}$ のとき

右図より　$\alpha+\beta=\pi$(^{オ}⓶)

$\alpha=\theta+\dfrac{\pi}{6}$，$\beta=2\theta$ を代入すると

$$\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)+2\theta=\pi$$

これを解いて　$\theta=\dfrac{{}^{カ}5}{{}^{キク}18}\pi\ \left(\dfrac{\pi}{6}<\theta\leqq\dfrac{\pi}{2} \text{ を満たす}\right)$

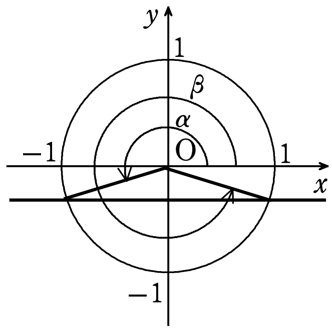


第 1 問 (必答問題) (配点 15)

・$\dfrac{\pi}{2}<\theta<\pi$ の場合

$\dfrac{2}{3}\pi<\alpha<\dfrac{7}{6}\pi$，$\pi<\beta<2\pi$ であるので，

右の図のときである。



よって　　$\alpha+\beta=3\pi$(ケ ⑥)

$\alpha=\theta+\dfrac{\pi}{6}$，$\beta=2\theta$ を代入すると

$$\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)+2\theta=3\pi$$

これを解いて　　$\theta=\dfrac{17}{18}\pi$（コサ, シス）$\left(\dfrac{\pi}{2}<\theta<\pi\right.$ を満たす)

以上より，$0\leqq\theta<\pi$ のとき，① の解は

$$\theta=\frac{\pi}{6},\ \frac{5}{18}\pi,\ \frac{17}{18}\pi \text{ である。}$$

(2)　$\cos\alpha=\cos\beta$ …③ とする。

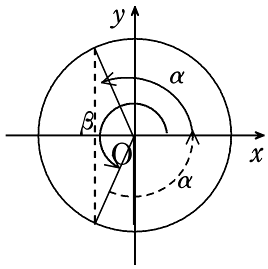
2 つの一般角 α と β が等しければ，$\cos\alpha=\cos\beta$ が成り立つ。$\alpha=\beta$ を満たす θ は $\dfrac{\pi}{6}$ であり，これは ③ の解の 1 つである。

以下 $\theta\fallingdotseq\!\!\!\!/\ \dfrac{\pi}{6}$ とする。

③ が成り立つとき，点 P の x 座標と点 Q の x 座標は等しい。

$\alpha>\beta$ すなわち $0\leqq\theta<\dfrac{\pi}{6}$ のとき，$\dfrac{\pi}{6}\leqq\alpha<\dfrac{\pi}{3}$，$0\leqq\beta<\dfrac{\pi}{3}$ であり，点 P，点 Q はともに第 1 象限にある。第 1 象限において点 P，Q の x 座標が一致するのは $\theta=\dfrac{\pi}{6}$ のときであるから，$\alpha>\beta$ のとき ③ は成り立たない。

$\alpha<\beta$ すなわち $\dfrac{\pi}{6}<\theta<\pi$ のとき，右図より，$\alpha+\beta=2\pi$ が成り立つ。



よって

$$\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)+2\theta=2\pi$$

ゆえに $\theta=\dfrac{11}{18}\pi$

したがって，$0\leqq\theta<\pi$ のとき ③ の解は

$$\theta=\frac{\pi}{6},\ \frac{11}{18}\pi$$

（セ, ソタ, チツ）

である。

第 2 問 (必答問題) (配点 15)

(1) 水草 A の量は，1 日ごとに一定の倍率 r で増えるから，0 日目から 3 日目までに増える倍率は r^3 で表せる。すなわち　$r^3 = 1.32$ (ア ③)

$\log_{10} 1.32$ の値は，常用対数表より 0.1206 である。(イ ⓪)

$$r^3 = 1.32$$

から，両辺の常用対数をとると

$$\log_{10} r^3 = \log_{10} 1.32$$

$$3\log_{10} r = 0.1206$$

$$\log_{10} r = 0.{}^{ウエオカ}0402$$

(2) 水草 A の量は 1 日ごとに一定の倍率 r で増えるから，0 日目から 14 日目までに増える倍率は r^{14} で表せる。よって 14 日目の正午に水草 A の量は a の r^{14} 倍になる。(キ ③)

14 日目の正午に水草 A の量がちょうど 60 %になるから

$$a \times r^{14} = {}^{クケ}60 \cdots\cdots ①$$

① の両辺の常用対数をとると

$$\log_{10} ar^{14} = \log_{10} 60$$

$$\log_{10} a + \log_{10} r^{14} = \log_{10} 10 + \log_{10} 6$$

$$\log_{10} a + 14\log_{10} r = 1 + \log_{10} 6$$

$\log_{10} r = 0.0402$ と $\log_{10} 6 = 0.7782$ より

$$\log_{10} a + 14 \times 0.0402 = 1 + 0.7782$$

$$\log_{10} a = 1.2154 \quad (コ ③)$$

したがって　$a = 10^{1.2154} = 10^1 \times 10^{0.2154}$

常用対数表より　$\log_{10} 1.64 < 0.2154 < \log_{10} 1.65$

であるから　$1.64 < 10^{0.2154} < 1.65$

$$16.4 < 10^1 \times 10^{0.2154} < 16.5$$

$$16.4 < a < 16.5$$

よって，a 以下で最大の整数は　${}^{サシ}16$

となるから，作業後に残す水草 A の量は　16 %

第 3 問　(必答問題)　(配点　22)

(1)　$F(x)$ の導関数が $f(x)$ であることから

$$f(x)=F'(x)$$
$$=(2x^3+3x^2)'$$
$$={}^{ア}6x^2+{}^{イ}6x$$
$$=6x(x+1)$$

よって，$f(x)=0$ となるとき，$x=-1$，0 であるので

関数 $F(x)$ の増減表は次のようになる。

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$
$f(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$F(x)$	↗	極大値	↘	極小値	↗

したがって，$F(x)$ は，$x={}^{ウエ}-1$ で極大値をとる。

$G(x)$ の導関数が $f(x)$であるので，

$$G(x)=\int(6x^2+6x)dx$$
$$={}^{オ}2x^3+{}^{カ}3x^2+C \qquad (C は積分定数)$$

と表され，関数 $G(x)$ の増減表は次のようになる。

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$
$f(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$G(x)$	↗	極大値	↘	極小値	↗

したがって，$G(x)$ は，$x={}^{キ}0$ で極小値をとり，$x=-1$ で極大値をとる。

よって，$k=-1$ である。

また，関数 $G(x)$ の極大値が 0 であることから，$G(-1)=0$ である。

$G(-1)=1+C$ であるので　　$1+C=0$

よって，$C={}^{クケ}-1$

(2)　(i)　$F(x)$ が $x=0$ で極小値をとるので，$f(0)={}^{コ}0$ であり，

$x=0$ の前後で $f(x)$ の符号は，負から正に変わる (^{サ} ⓪)

$G(x)$ が $x=k$ で極大値をとるので，$f(k)={}^{シ}0$ であり，

$x=k$ の前後で $f(x)$ の符号は，正から負に変わる (^{ス} ①)

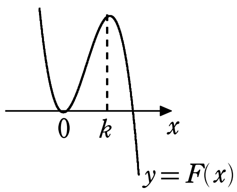
以上より，$k>0$ に注意すると，

$x\leqq 0$，$k\leqq x$のとき，$f(x)\leqq 0$ より，$F(x)$ は単調減少し，

$0\leqq x\leqq k$ のとき，$f(x)\geqq 0$　より，$F(x)$ は単調増加する。

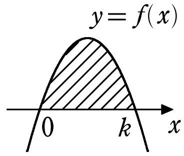
第 3 問　(必答問題)　(配点　22)

また，関数 $F(x)$ は $x=0$ で極小値 0 をとるので，
$y=F(x)$ のグラフの概形は (セ ③)



(ii)　$F'(x)=f(x)$ かつ $F(0)=0$ であることから

$$F(x)=F(x)-F(0)$$
$$=\Big[F(t)\Big]_0^x$$
$$=\int_0^x f(t)dt$$　(ソ ③，タ ⓪)



(i) より，関数 $F(x)$ は，$x=k$ で極大値をとるから

その極大値は　$F(k)=\int_0^k f(t)dt$　(チ ②，ツ ⓪)

$0 \leqq x \leqq k$ のとき，$f(x) \geqq 0$ であるので

これは，関数 $y=f(x)$ (テ ⓪) のグラフと x 軸で囲まれた図形の「面積」(ト ⓪) と等しい。(図は上図のようになる)

$G'(x)=f(x)$ かつ $G(k)=0$ であることから

$$G(x)=G(x)-G(k)$$
$$=\Big[G(t)\Big]_k^x$$
$$=\int_k^x f(t)dt$$

よって，　$G(0)=\int_k^0 f(t)dt$

$$=-\int_0^k f(t)dt$$
$$=-F(k)$$

であり，$G(x)$ は $x=0$ で極小値をとるから，

$F(x)$ の極大値 $F(k)$ は $G(x)$ の極小値 $G(0)$ の -1 倍 (ナ ②) と等しいことがわかる。

第 4 問 (選択問題) (配点　16)

(1)　直線 $x=n$ 上の格子点で T の内部にあるものの個数 a_n は

$n=1$ のとき　$(1,\ 1)$，$(1,\ 2)$ で　　$a_1=2$

$n=2$ のとき　$(2,\ 1)$，$(2,\ 2)$，……，$(2,\ 5)$ で　　$a_2=^{ア}5$

$n=3$ のとき　$(3,\ 1)$，$(3,\ 2)$，……，$(3,\ 8)$ で　　$a_3=^{イ}8$

これは公差（ウ ⓪）が エ3 の等差（オ ⓪）数列となっている。

実際，$x=n$ に対して，$(n,\ 1)$，$(n,\ 2)$，$(n,\ 3)$，……，$(n,\ 3n-1)$ の $3n-1$ 個の点で，$a_n=3n-1$ である。

したがって，T の内部にある格子点の個数は

$$\sum_{n=1}^{20}(3n-1)=3\cdot\frac{1}{2}\cdot20\cdot21-20=^{カキク}610$$

(2)　直線 $x=k$ 上の格子点で U の内部にあるものは，点 $(k,\ 1)$，$(k,\ 2)$，$(k,\ 3)$，……，$(k,\ 2^k-1)$ であるから，その個数は 2^k-1（ケ ⑦）である。

したがって，U の内部にある格子点の個数は

$$\sum_{k=1}^{n}(2^k-1)=2\cdot\frac{2^n-1}{2-1}-n=2^{n+1}-n-2$$ （コ ①，サ ⑦）

(3)　(2)と同様に，直線 $x=k$ 上の格子点で V の内部にあるものの個数は $ak^2+bk+c-1$ であるから，V の内部にある格子点の個数は

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}(ak^2+bk+c-1)&=\frac{a}{6}n(n+1)(2n+1)+\frac{b}{2}n(n+1)+(c-1)n\\&=\frac{a}{3}n^3+\left(\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}b\right)n^2+\left(\frac{1}{6}a+\frac{1}{2}b+c-1\right)n\end{aligned}$$

となるので，

$$\frac{a}{3}n^3+\left(\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}b\right)n^2+\left(\frac{1}{6}a+\frac{1}{2}b+c-1\right)n=n^3$$

が n についての恒等式となるとき

$$\begin{cases}\dfrac{a}{3}=1\\[2mm]\dfrac{1}{2}a+\dfrac{1}{2}b=0\\[2mm]\dfrac{1}{6}a+\dfrac{1}{2}b+c-1=0\end{cases}$$

これを解くと，$a=^{シ}3$，$b=^{スセ}-3$，$c=^{ソ}2$

第 5 問 [2]（選択問題）（配点　16）

(1)　確率変数 X は正規分布 $N(110, 20^2)$ に従うから，$Z=\dfrac{X-110}{20}$ とすると

確率変数 Z は正規分布 $N(0, 1)$ に従う。

よって，

$$P(110 \leqq X < 140)=P(110 \leqq X \leqq 140)$$
$$=P(0 \leqq Z \leqq 1.5)={}^{アイウエ}0.4332$$

また，Y は二項分布 $B(200000, 0.4332)$ に従うから Y の期待値 $E(Y)$ は

$$E(Y)=200000 \times 0.4332=86640$$ （^{オ}④）

(2)　題意により，標本平均 $\overline{W}$ は正規分布 $N\left(m, \dfrac{\sigma^2}{n}\right)$ （^{カ}⑥）に従う。

このとき，m に対する 95% 信頼区間を $A \leqq m \leqq B$ と表すと，

$A=\overline{W}-1.96 \times \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$，$B=\overline{W}+1.96 \times \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$　となるから信頼区間の幅は

$B-A=2 \times 1.96 \times \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}=\dfrac{3.92\sigma}{\sqrt{n}}$　（^{キ}⑤）　となる。

$\sigma=20$ として $\dfrac{3.92\sigma}{\sqrt{n}} \leqq 4$ ……①　を満たす自然数 n を求めると

$(3.92 \cdot 20)^2 \leqq 16n$　　これを解くと　　$384.16 \leqq n$

よって，これを満たす最小の自然数 n_0 は　$n_0={}^{クケコ}385$　である。

(3)　示したいことは，過去の平均 110 g より軽いことなので，

対立仮説は「$m<110$」（^{サ}⓪）で，帰無仮説は「$m=110$」である。

帰無仮説が正しいと仮定すると，$\dfrac{20^2}{400}=1$ であり，題意に沿って $\overline{W}$ は近似的に

正規分布 $N(110, 1)$（^{シ}⑤）に従う。

$U=\dfrac{\overline{W}-110}{1}$ とすると，確率変数 U は正規分布 $N(0, 1)$ に従う。

このとき，

$$P(\overline{W} \leqq 108.2)=P(U \leqq -1.8)=0.5-P(0 \leqq U \leqq 1.8)=0.5-0.4641={}^{スセソタ}0.0359$$

$0.0359=3.59\%$ は 5% より小さいから，帰無仮説は棄却される。（^{チ}①）

したがって，今年収穫されるレモンの重さの母平均は 110 g より軽いと判断できる。

（^{ト}⓪）

第 6 問　(選択問題)　(配点　16)

(1)　A$(1,\ 0,\ 0)$，B$\left(a,\ \sqrt{1-a^2},\ 0\right)$

点 C の座標を $(x,\ y,\ z)$ とする。C が S 上にあるとき，S は O を中心とする半径 1 の球であるから

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right|^2={}^{ア}1$$

である。これを，ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ の成分を用いて表すと

$$x^2+y^2+z^2=1 \quad \cdots\cdots ①$$

となる。

さらに，△ABC が正三角形であるとする。△OAC と△OAB は，対応する三組の辺の長さがそれぞれ等しいから合同である。したがって，∠AOC = ∠AOB である。ここで

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right|\cos\angle\mathrm{AOC}=1\cdot1\cdot\cos\angle\mathrm{AOC}=\cos\angle\mathrm{AOC}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|\cos\angle\mathrm{AOB}=1\cdot1\cdot\cos\angle\mathrm{AOB}=\cos\angle\mathrm{AOB}$$

であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}} \quad ({}^{イ}④)$$

が成り立つ。これをベクトルの成分を用いて表すと

$$1\cdot x+0\cdot y+0\cdot z=1\cdot a+0\cdot\sqrt{1-a^2}+0\cdot0$$

$$x=a \quad \cdots\cdots ② \quad ({}^{ウ}⓪)$$

となる。同様に△OBC と△OAB も合同であるから，∠BOC = ∠AOB である。

$$\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right|\cos\angle\mathrm{BOC}=1\cdot1\cdot\cos\angle\mathrm{BOC}=\cos\angle\mathrm{BOC}$$

も考慮すると

$$\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

が成り立ち，これをベクトルの成分を用いて表すと

$$a\cdot x+\sqrt{1-a^2}\cdot y+0\cdot z=1\cdot a+0\cdot\sqrt{1-a^2}+0\cdot0$$

$$ax+\sqrt{1-a^2}\,y=a \quad \cdots\cdots ③ \quad ({}^{エ}⓪,\ {}^{オ}⑤)$$

となる。

逆に，実数 $x,\ y,\ z$ が ①，②，③ を満たすとき，C$(x,\ y,\ z)$ は S 上の点であり，△ABC は正三角形になっていることがわかる。

(2)(i)　$a=\dfrac{3}{5}$ のとき，②，③ は

$$x=\frac{3}{5},\quad \frac{3}{5}x+\frac{4}{5}y=\frac{3}{5}$$

となる。これをともに満たす実数 x，y は

$$x=\frac{{}^{カ}3}{{}^{キ}5},\quad y=\frac{{}^{ク}3}{{}^{ケコ}10}$$

である。これを ① に代入すると

第 6 問 (選択問題) (配点 16)

$$\left(\frac{3}{5}\right)^2+\left(\frac{3}{10}\right)^2+z^2=1 \qquad \text{すなわち} \qquad z^2=\frac{11}{20}$$

よって，$z=\pm\sqrt{\frac{11}{20}}$ となる。これより，① を満たす実数 z はちょうど二つある(サ ②)。

したがって，△ABC が正三角形となる S 上の点 C はちょうど二つある。

(ii) $a=-\frac{3}{5}$ のとき，②，③ は

$$x=-\frac{3}{5}, \quad -\frac{3}{5}x+\frac{4}{5}y=-\frac{3}{5}$$

となる。これをともに満たす実数 x，y は

$$x=-\frac{3}{5}, \quad y=-\frac{6}{5}$$

である。これを ① に代入すると

$$\left(-\frac{3}{5}\right)^2+\left(-\frac{6}{5}\right)^2+z^2=1 \qquad \text{すなわち} \qquad z^2=-\frac{4}{5}$$

である。これより，① を満たす実数 z はない。したがって，△ABC が正三角形となる S 上の点 C はない (シ ⓪) ことがわかる。

(3) △ABC が正三角形となる S 上の点 C があるための，a に関する条件を考える。

実数 x，y，z は，①，②，③ を満たすとする。② と ③ から

$$x=a, \quad ax+\sqrt{1-a^2}\,y=a$$

これより

$$x=a, \quad y=\frac{a(1-a)}{\sqrt{1-a^2}}$$

である。このとき，① から

$$\begin{aligned}
z^2&=1-x^2-y^2\\
&=1-a^2-\left\{\frac{a(1-a)}{\sqrt{1-a^2}}\right\}^2\\
&=1-a^2-\frac{a^2(1-a)^2}{1-a^2}\\
&=\frac{(1-a^2)^2-a^2(1-a)^2}{1-a^2}\\
&=\frac{\{(1-a^2)+a(1-a)\}\{(1-a^2)-a(1-a)\}}{(1+a)(1-a)}\\
&=\frac{(1+a-2a^2)(1-a)}{(1+a)(1-a)}\\
&=\frac{(1+2a)(1-a)}{1+a} \qquad (\text{ス ③})
\end{aligned}$$

である。さらに，$z^2 \geqq 0$，$1+a>0$ であるから，$(1+2a)(1-a) \geqq 0$ である。

第 6 問　(選択問題)　(配点　16)

逆に，$(1+2a)(1-a) \geqq 0$ のとき，①，②，③ を満たす実数 x，y，z が あることがわかる。よって

$$(1+2a)(1-a) \geqq 0 \quad \text{すなわち} \quad (2a+1)(a-1) \leqq 0$$

ゆえに　$-\dfrac{1}{2} \leqq a \leqq 1$　となる。ここで，$-1 < a < 1$ より，$-\dfrac{1}{2} \leqq a < 1$ となる。

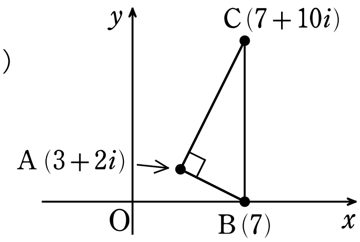
以上のことから，$-\dfrac{1}{2} \leqq a < 1$ (セ ④) は，△ABC は正三角形となる S 上の点 C があるための必要十分条件である。

第 7 問 (選択問題) (配点 16)

(1) $\alpha=3+2i$，$\beta=7$，$\gamma=7+10i$ より

$$\gamma-\alpha=(7+10i)-(3+2i)={}^{ア}4+{}^{イ}8i$$

$$\beta-\alpha=7-(3+2i)={}^{ウ}4-{}^{エ}2i$$



よって　$\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}=\dfrac{4+8i}{4-2i}=\dfrac{4(1+2i)(2+i)}{2(2-i)(2+i)}=2i$ （オ ③ ）

また　$2i=2\left(\cos\dfrac{\pi}{2}+i\sin\dfrac{\pi}{2}\right)$　より

$2i$ の偏角は $\dfrac{\pi}{2}$ （カ ④ ）

(2) w の偏角が $\dfrac{\pi}{2}$ または $\dfrac{3}{2}\pi$ のとき，w は虚軸上に存在するため実部は 0 である。

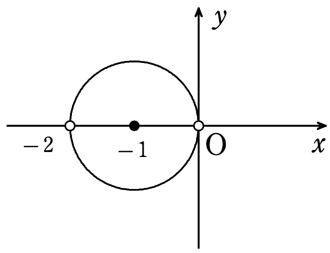
すなわち，w は純虚数である。（キ ② ）

また，w が純虚数であるとき　$\overline{w}=-w$　より　$w+\overline{w}=0$　（ク ⓪ ）

(3)(ⅰ) 直線 AB と直線 AC が垂直に交わるための必要十分条件は

$1+\dfrac{2}{z}$ が純虚数になることであり　$\left(1+\dfrac{2}{z}\right)+\overline{\left(1+\dfrac{2}{z}\right)}=0$

整理して　$2+\dfrac{2}{z}+\dfrac{2}{\overline{z}}=0$



両辺に $z\overline{z}$ をかけて　$2z\overline{z}+2\overline{z}+2z=0$

以下，整理して　$z\overline{z}+z+\overline{z}=0$

$$(z+1)(\overline{z}+1)-1=0$$

$$(z+1)\overline{(z+1)}=1$$

$$|z+1|^2=1$$

$$|z+1|=1$$ （ケ ⑥ ）

よって，点 z 全体は複素数平面上において，中心 -1，半径 1 の円となる。

$z\neq 0, 2, -2$ に注意してこれを図示すると，右上図のようになる。（コ ⓪ ）

(ⅱ) α, β, γ をそれぞれ -1 倍した複素数が α', β', γ' であるため

$\alpha'=-\alpha$，$\beta'=-\beta$，$\gamma'=-\gamma$ とすると

$$\frac{\gamma'-\alpha'}{\beta'-\alpha'}=\frac{(-\gamma)-(-\alpha)}{(-\beta)-(-\alpha)}=\frac{-(\gamma-\alpha)}{-(\beta-\alpha)}=\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}=1+\frac{2}{z}$$ が成り立つ。

すなわち，直線 A′B′ と直線 A′C′ が垂直に交わるための必要十分条件は

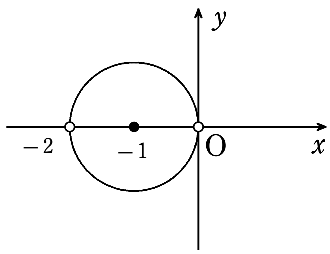
(ⅰ) と同様に考えて　$|z+1|=1$　である。

よって点 z 全体は複素数平面上において

中心 -1，半径 1 の円となる。

$z\neq 0, 2, -2$ に注意してこれを図示すると

右図のようになる。（サ ⓪ ）



第 7 問 (選択問題) (配点　16)

(iii) $\alpha''=-z$, $\beta''=2$, $\gamma''=-\dfrac{4}{z}$ としたとき

$$\frac{\gamma''-\alpha''}{\beta''-\alpha''}=\frac{-\dfrac{4}{z}-(-z)}{2-(-z)}=\frac{z^2-4}{z(z+2)}=\frac{z-2}{z}=1-\frac{2}{z}$$ が成り立つ。

このとき，直線 A″B″ と直線 A″C″ が垂直に交わるための必要十分条件は

$1-\dfrac{2}{z}$ が純虚数になることであり　　$\left(1-\dfrac{2}{z}\right)+\overline{\left(1-\dfrac{2}{z}\right)}=0$

整理して　　$2-\dfrac{2}{z}-\dfrac{2}{\overline{z}}=0$

両辺に $z\overline{z}$ をかけて　　$2z\overline{z}-2\overline{z}-2z=0$

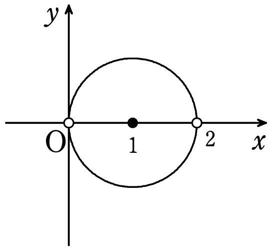
以下，整理して　　$z\overline{z}-z-\overline{z}=0$

$(z-1)(\overline{z}-1)-1=0$

$(z-1)\overline{(z-1)}=1$

$|z-1|^2=1$

$|z-1|=1$



よって点 z 全体は複素数平面上において，中心 1，半径 1 の円となる。

$z\fallingdotseq 0$, 2 , -2 に注意してこれを図示すると，右上図のようになる。（ シ ① ）