

問題B

正 n 角形 $P_1P_2 \cdots P_n$ の外接円の中心を O とし, X, Y をすべての頂点が V に含まれる正 m 角形の隣接する2つの頂点とする ($3 \leq m \leq n$ に注意). $\angle XOY = \frac{2\pi}{m}$ は $\angle P_1OP_2 = \frac{2\pi}{n}$ の自然数倍であるから

$$\frac{2\pi}{m} = k \cdot \frac{2\pi}{n}, \text{ すなわち } n = km \text{ (} k \text{ は自然数)}$$

とおける. したがって, m は n の約数であり, $k = \frac{n}{m}$ は n の $k \neq n, k \neq \frac{n}{2}$ を満たす約数である. また, 条件を満たす正 m 角形は, $\left\{ P_i \mid i = 1, 2, \dots, \frac{n}{m} \right\}$ に含まれる頂点がただ1つだけあるから, 全部で $\frac{n}{m}$ 個ある.

(1) $n = 2^\alpha$ (α は2以上の自然数) のとき

$$s = 1 + 2 + \cdots + 2^{\alpha-2} = 2^{\alpha-1} - 1 < 2^\alpha = n \text{ (} s \neq n \text{)}$$

(2) $n = p^\alpha$ (p は奇素数, α は自然数) のとき

$$s = 1 + p + \cdots + p^{\alpha-1} = \frac{p^\alpha - 1}{p - 1} < p^\alpha = n \text{ (} s \neq n \text{)}$$

(3) $n = p^\alpha q^\beta$ (p, q は $p < q$ である素数, α, β は自然数) のとき

常に正の値をとる x, ℓ の関数 $f(x, \ell)$ を次の式で定める.

$$f(x, \ell) = \frac{x^{\ell+1} - 1}{x^\ell(x - 1)} \text{ (} x > 1, \ell = 1, 2, 3, \dots \text{)}$$

x を固定すると

$$f(x, \ell) = \frac{1}{x - 1} \left(x - \frac{1}{x^\ell} \right) \text{ (} \ell = 1, 2, 3, \dots \text{)}$$

であるから, $f(x, \ell)$ は ℓ の単調増加関数であり, $f(x, \ell) < \frac{x}{x - 1}$.

ℓ を固定すると

$$f(x, \ell) = \frac{1}{1 - \frac{1}{x}} \left(1 - \frac{1}{x^{\ell+1}} \right) = 1 + \frac{1}{x} + \cdots + \left(\frac{1}{x} \right)^\ell \text{ (} x > 1 \text{)}$$

であるから, $f(x, \ell)$ は x の単調減少関数である.

(ア) p が奇素数の場合

n の約数の総和 $S(n)$ は

$$S(n) = (1 + p + \cdots + p^\alpha) (1 + q + \cdots + q^\beta) = \frac{p^{\alpha+1} - 1}{p - 1} \cdot \frac{q^{\beta+1} - 1}{q - 1}$$

であり, $s = S(n) - n$. したがって, $s = n$ となるのは

$$2 = \frac{S(n)}{n} = \frac{p^{\alpha+1} - 1}{p^\alpha(p - 1)} \cdot \frac{q^{\beta+1} - 1}{q^\beta(q - 1)} = f(p, \alpha)f(q, \beta)$$

のときである. ここで

$$f(p, \alpha)f(q, \beta) \leq f(3, \alpha)f(5, \beta) < \frac{3}{3 - 1} \cdot \frac{5}{5 - 1} = \frac{15}{8} < 2$$

よって, $s = n$ とはならない.

(イ) $p = 2$ の場合

$$S(n) = (1 + 2 + \cdots + 2^\alpha) (1 + q + \cdots + q^\beta) = (2^{\alpha+1} - 1) \cdot \frac{q^{\beta+1} - 1}{q - 1}$$

であり, $s = S(n) - n - \frac{n}{2}$. したがって, $s = n$ となるのは

$$\frac{5}{2} = \frac{S(n)}{n} = \frac{2^{\alpha+1} - 1}{2^\alpha} \cdot \frac{q^{\beta+1} - 1}{q^\beta(q - 1)} = f(2, \alpha)f(q, \beta)$$

のときである. $q \geq 5$ ならば

$$f(2, \alpha)f(q, \beta) \leq f(2, \alpha)f(5, \beta) < \frac{2}{2-1} \cdot \frac{5}{5-1} = \frac{5}{2}$$

であり, $s = n$ とはならない. したがって

$$f(2, \alpha)f(3, \beta) = \frac{5}{2} \left(f(2, \alpha) = \frac{2^{\alpha+1} - 1}{2^\alpha}, f(3, \beta) = \frac{3^{\beta+1} - 1}{2 \cdot 3^\beta} \right) \dots \textcircled{1}$$

を満たす α, β の値を求めればよい.

$\alpha \geq 4$ ならば

$$f(2, \alpha)f(3, \beta) > f(2, 3)f(3, 1) = \frac{15}{8} \cdot \frac{4}{3} = \frac{5}{2}$$

$$\left(\beta \geq 2 \text{ ならば, } f(2, 3)f(3, \beta) > f(2, 3)f(3, 1) \text{ に注意} \right)$$

次に, $\alpha = 1, 2$ に対し, ①すなわち

$$2^\alpha \cdot 3^\beta \cdot 5 = (2^{\alpha+1} - 1) (3^{\beta+1} - 1) \dots \textcircled{2}$$

を満たす (自然数) β が存在するならば

$$\alpha = 1 \text{ のとき } 2 \cdot 3^\beta \cdot 5 = 3 (3^{\beta+1} - 1), 3^\beta = -3$$

$$\alpha = 2 \text{ のとき } 4 \cdot 3^\beta \cdot 5 = 7 (3^{\beta+1} - 1), 3^\beta = 7$$

となるが, これらはいずれも起こり得ない.

以上, (1), (2), (3) により, 求める n の値は

$$n = 2^3 \cdot 3 = 24$$

< (ア) の注釈 >

$$2p^\alpha q^\beta (pq - p - q + 1) = p^{\alpha+1} q^{\beta+1} - p^{\alpha+1} - q^{\beta+1} + 1$$

これを变形して

$$p^\alpha q^\beta (pq - 2p - 2q + 2) + p^{\alpha+1} + q^{\beta+1} = 1$$

ここで, 左辺の () 内の式を T とすると

$$T = (p-2)(q-2) - 2 \geq 1 \quad (\because p \geq 3, q \geq 5)$$

したがって, この場合は起こり得ない.

< (イ) の注釈 >

$$5 \cdot 2^{\alpha-1} q^\beta = (2^{\alpha+1} - 1) (1 + q + \cdots + q^\beta) \dots (*)$$

ここで, $2^{\alpha-1}$ と $2^{\alpha+1} - 1$, q^β と $1 + q + \cdots + q^\beta$ はいずれも互いに素であるから

$$2^{\alpha+1} - 1 = xq^\beta, 1 + q + \cdots + q^\beta = 2^{\alpha-1}y$$

$$\left((x, y) = (1, 5) \text{ または } (5, 1) \right)$$

$$4(1 + q + \cdots + q^\beta) = 2^{\alpha+1}y = (1 + xq^\beta)y$$

$$4 \equiv y \pmod{q}$$

(i) $(x, y) = (1, 5)$ のとき

$$1 \equiv 0 \pmod{q} \quad (\text{これは起こり得ない})$$

(ii) $(x, y) = (5, 1)$ のとき

$3 \equiv 0 \pmod{q}$ であるから $q = 3$ であり

$$2^{\alpha+1} - 1 = 5 \cdot 3^\beta, \quad 1 + 3 + \cdots + 3^\beta = 2^{\alpha-1}$$

$$5 \cdot 2^\alpha = 5 \cdot 2 \left(1 + 3 + \cdots + 3^\beta\right) = 5 \left(3 \cdot 3^\beta - 1\right) = 3 \left(2^{\alpha+1} - 1\right) - 5$$

$$2^\alpha = 8 = 2^3, \quad \alpha = 3, \quad 1 + 3 + \cdots + 3^\beta = 4, \quad \beta = 1$$

よって、 $n = 2^3 \cdot 3 = 24$ (このとき、(*) は成り立つ).

あるいは、(*) を次のように変形して利用してもよい.

$$5(q-1) \cdot 2^{\alpha-1} q^\beta = (2^{\alpha+1} - 1) (q^{\beta+1} - 1)$$

$$(q-5) \cdot 2^{\alpha-1} q^\beta + 2^{\alpha+1} + q^{\beta+1} = 1$$

したがって、 $q-5 < 0$ であるから $q = 3$ であり

$$2^\alpha 3^\beta + 2 \cdot 2^\alpha + 3 \cdot 3^\beta = 1$$

$$(2^\alpha - 3)(3^\beta - 2) = 5 \quad (3^\beta - 2 > 0 \text{ に注意})$$

$$(2^\alpha - 3, 3^\beta - 2) = (1, 5) \text{ または } (5, 1)$$

(以下略)