数学解法コンテスト　第15回　解答例

問題B

正 n 角形 $\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2\cdots\mathrm{P}_n$ の外接円の中心を O とし，X, Y をすべての頂点が $\boldsymbol{V}$ に含まれる正 m 角形の隣接する 2 つの頂点とする ($3 \leqq m \leqq n$ に注意)．$\angle\mathrm{XOY} = \dfrac{2\pi}{m}$ は $\angle\mathrm{P}_1\mathrm{OP}_2 = \dfrac{2\pi}{n}$ の自然数倍であるから

$$\frac{2\pi}{m} = k\cdot\frac{2\pi}{n},\ \text{すなわち}\quad n = km\ (k\text{ は自然数})$$

とおける．したがって，m は n の約数であり，$k = \dfrac{n}{m}$ は n の $k \fallingdotseq n,\ k \fallingdotseq \dfrac{n}{2}$ を満たす約数である．また，条件を満たす正 m 角形は，$\left\{\mathrm{P}_i \,\middle|\, i = 1,\ 2,\ \cdots,\ \dfrac{n}{m}\right\}$ に含まれる頂点がただ 1 つだけあるから，全部で $\dfrac{n}{m}$ 個ある．

(1) $n = 2^\alpha$ (α は 2 以上の自然数) のとき

$$s = 1 + 2 + \cdots + 2^{\alpha-2} = 2^{\alpha-1} - 1 < 2^\alpha = n\ (s \fallingdotseq n)$$

(2) $n = p^\alpha$ (p は奇素数，α は自然数) のとき

$$s = 1 + p + \cdots + p^{\alpha-1} = \frac{p^\alpha - 1}{p-1} < p^\alpha = n\ (s \fallingdotseq n)$$

(3) $n = p^\alpha q^\beta$ ($p,\ q$ は $p < q$ である素数，$\alpha,\ \beta$ は自然数) のとき

常に正の値をとる $x,\ \ell$ の関数 $f(x,\ \ell)$ を次の式で定める．

$$f(x,\ \ell) = \frac{x^{\ell+1} - 1}{x^\ell(x-1)}\ (x > 1,\ \ell = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

x を固定すると

$$f(x,\ \ell) = \frac{1}{x-1}\left(x - \frac{1}{x^\ell}\right)\ (\ell = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

であるから，$f(x,\ \ell)$ は ℓ の単調増加関数であり，$f(x,\ \ell) < \dfrac{x}{x-1}$.

ℓ を固定すると

$$f(x,\ \ell) = \frac{1}{1 - \frac{1}{x}}\left(1 - \frac{1}{x^{\ell+1}}\right) = 1 + \frac{1}{x} + \cdots + \left(\frac{1}{x}\right)^\ell\ (x > 1)$$

であるから，$f(x,\ \ell)$ は x の単調減少関数である．

(ア) p が奇素数の場合

n の約数の総和 $S(n)$ は

$$S(n) = \left(1 + p + \cdots + p^\alpha\right)\left(1 + q + \cdots + q^\beta\right) = \frac{p^{\alpha+1} - 1}{p-1}\cdot\frac{q^{\beta+1} - 1}{q-1}$$

であり，$s = S(n) - n$．したがって，$s = n$ となるのは

$$2 = \frac{S(n)}{n} = \frac{p^{\alpha+1} - 1}{p^\alpha(p-1)}\cdot\frac{q^{\beta+1} - 1}{q^\beta(q-1)} = f(p,\ \alpha)f(q,\ \beta)$$

のときである．ここで

$$f(p,\ \alpha)f(q,\ \beta) \leqq f(3,\ \alpha)f(5,\ \beta) < \frac{3}{3-1}\cdot\frac{5}{5-1} = \frac{15}{8} < 2$$

よって，$s = n$ とはならない．

(イ) $p=2$ の場合

$$S(n)=\left(1+2+\cdots+2^{\alpha}\right)\left(1+q+\cdots+q^{\beta}\right)=\left(2^{\alpha+1}-1\right)\cdot\frac{q^{\beta+1}-1}{q-1}$$

であり，$s=S(n)-n-\dfrac{n}{2}$．したがって，$s=n$ となるのは

$$\frac{5}{2}=\frac{S(n)}{n}=\frac{2^{\alpha+1}-1}{2^{\alpha}}\cdot\frac{q^{\beta+1}-1}{q^{\beta}(q-1)}=f(2,\ \alpha)f(q,\ \beta)$$

のときである．$q\geqq 5$ ならば

$$f(2,\ \alpha)f(q,\ \beta)\leqq f(2,\ \alpha)f(5,\ \beta)<\frac{2}{2-1}\cdot\frac{5}{5-1}=\frac{5}{2}$$

であり，$s=n$ とはならない．したがって

$$f(2,\ \alpha)f(3,\ \beta)=\frac{5}{2}\quad\left(f(2,\ \alpha)=\frac{2^{\alpha+1}-1}{2^{\alpha}},\ f(3,\ \beta)=\frac{3^{\beta+1}-1}{2\cdot 3^{\beta}}\right)\quad\cdots①$$

を満たす $\alpha,\ \beta$ の値を求めればよい．

$\alpha\geqq 4$ ならば

$$f(2,\ \alpha)f(3,\ \beta)>f(2,\ 3)f(3,\ 1)=\frac{15}{8}\cdot\frac{4}{3}=\frac{5}{2}$$

$\left(\beta\geqq 2\right.$ ならば，$f(2,\ 3)f(3,\ \beta)>f(2,\ 3)f(3,\ 1)$ に注意$\left.\right)$

次に，$\alpha=1,\ 2$ に対し，①すなわち

$$2^{\alpha}\cdot 3^{\beta}\cdot 5=\left(2^{\alpha+1}-1\right)\left(3^{\beta+1}-1\right)\quad\cdots②$$

を満たす (自然数) β が存在するならば

$\alpha=1$ のとき　$2\cdot 3^{\beta}\cdot 5=3\left(3^{\beta+1}-1\right),\ 3^{\beta}=-3$

$\alpha=2$ のとき　$4\cdot 3^{\beta}\cdot 5=7\left(3^{\beta+1}-1\right),\ 3^{\beta}=7$

となるが，これらはいずれも起こり得ない．

以上，(1), (2), (3) により，求める n の値は

$$n=2^3\cdot 3=24$$