数学解法コンテスト　第15回　解答例

問題 A

2 条件 (1), (2) を満たす数列 $\{a_n\}$ が存在すると仮定する．まず，この仮定の下で

$$(3) \iff m=(a+1)(\ell+1)^{a+1}-1 \ \cdots ①$$

となることを示す．$a_n < c$ ($c \in \boldsymbol{N}$) かつ $f(c)=a_n$ となる c のうち，最小のものが a_{n+1} であることに注意しよう．さて

$$s=1\cdot(\ell+1)+a-1,\ t=a(\ell+1)+\ell,\ u=a(\ell+1)^{a+1}+\sum_{i=0}^{a}\ell(\ell+1)^i$$

とおくと

$$s=\ell+a,\ t=(a+1)\ell+a,\ u=a(\ell+1)^{a+1}+(\ell+1)^{a+1}-1=(a+1)(\ell+1)^{a+1}-1$$

$$f(s)=a,\ f(t)=s,\ f(u)=a+(a+1)\ell=t\ (a<s<t<u)$$

である．また，a_2 を $\ell+1$ 進表示したときの桁数が 1 ならば

$$a=a_1=f(a_2)=a_2$$

となるが，これは起こり得ない．したがって，$a_2=s$ である．次に，$c \leqq t$ を満たす $c \in \boldsymbol{N}$ を

$$c=c_1(\ell+1)+c_2\ \bigl(c_i\ (i=1,\ 2) \text{ は } 0 \leqq c_i \leqq \ell \text{ である整数}\bigr)$$

と表示すると，$c_1 \leqq a$ であり

$$f(c)=c_1+c_2 \leqq a+\ell=a_2$$

ここで，$f(c)=a_2$ となるのは，$c_1=a$ かつ $c_2=\ell$，つまり $c=t$ のときである．よって，$a_3=t$ であり，同様にして $a_4=u$ もいえる．ゆえに，①は成り立つ．

あとは，(1) かつ (2) を満たす数列 $\{a_n\}$ が存在することをいえばよい．以下，この数列が次の漸化式によって定まることを数学的帰納法を用いて示す．

$$a_1=a,\ a_2=\ell+a$$

$$(*)\ a_{n+1}=a(\ell+1)^{\alpha_n}+\sum_{i=0}^{\alpha_n-1}\ell(\ell+1)^i\ \left(\text{ただし } \alpha_n=\frac{a_n-a}{\ell}\right)(n=2,\ 3,\ \cdots)$$

先に述べたことから，$a_2=\ell+a$, $a_3=(a+1)\ell+a$ であり

$$\alpha_2=\frac{a_2-a}{\ell}=1\in\boldsymbol{N},\ a_3=a(\ell+1)+\ell$$

したがって，$n=2$ のとき，$\alpha_n \in \boldsymbol{N}$ かつ $(*)$ が成り立つ．次に，2 以上の任意の $n \in \boldsymbol{N}$ に対し，$\alpha_n \in \boldsymbol{N}$ かつ $(*)$ が成り立つとする．このとき，$(*)$ により

$$a_{n+1}\equiv a \pmod{\ell},\ a_{n+1}>a,\ \alpha_{n+1}\in\boldsymbol{N}\ (a_{n+1}=a+\alpha_{n+1}\ell)$$

さらに，前半の議論と同様にして

$$a_{n+2}=a(\ell+1)^{\alpha_{n+1}}+\sum_{i=0}^{\alpha_{n+1}-1}\ell(\ell+1)^i$$

もいえる．よって，2 以上のすべての $n \in \boldsymbol{N}$ に対し，$\alpha_n \in \boldsymbol{N}$ かつ $(*)$ が成り立つから，2 条件 (1), (2) を満たす数列 $\{a_n\}$ は存在する．

以上により，求める必要十分条件は

$$m=(a+1)(\ell+1)^{a+1}-1$$

【別解】

まず，(1) かつ (2) を満たす数列 $\{a_n\}$ は，次の式で定まる数列 $\{b_n\}$ に一致することを示す.

$$b_1=a,\ b_2=\ell+a,\ b_{n+1}=(a+1)\left\{(\ell+1)^{\frac{b_n-a}{\ell}}-1\right\}+a\ (n=2,\ 3,\ \cdots)$$

$a_1=a,\ a_2\in \boldsymbol{N},\ f(a_2)=a<a_2$ と (2) により，a_2 は $f(i)=a<i$ となる $i\in \boldsymbol{N}$ のうちで最小のものである．したがって

$$a_2=1\times(\ell+1)+a-1=\ell+a=b_2$$

次に，$n\geqq 2$ とし，$a_n=b_n\equiv a\ (\mathrm{mod}\ \ell)$ を仮定する ($n=2$ のとき，これは成り立っている).
$\alpha=\dfrac{b_n-a}{\ell}$ とおくと，$a<a_n$ であるから $\alpha\in \boldsymbol{N}$ であり

$$\begin{aligned}b_{n+1}&=(a+1)\left\{(\ell+1)^{\alpha}-1\right\}+a\\&=a(\ell+1)^{\alpha}+\sum_{i=0}^{\alpha-1}\ell\cdot(\ell+1)^{i}\ \cdots ①\\&>a+\sum_{i=0}^{\alpha-1}\ell\end{aligned}$$

したがって

$$b_{n+1}\in \boldsymbol{N},\ b_{n+1}>f(b_{n+1})=a+\alpha\ell=b_n=a_n$$

さらに

$$a_{n+1}\in \boldsymbol{N},\ f(a_{n+1})=a_n<a_{n+1}$$

と (2), ①が成り立つことから，a_{n+1}, b_{n+1} は $f(i)=a_n<i$ となる $i\in \boldsymbol{N}$ のうち最小であるものに一致する．よって，$a_{n+1}=b_{n+1}$ である $\big(b_{n+1}\equiv a\ (\mathrm{mod}\ \ell)$ も成立していることに注意$\big)$.
ゆえに，数学的帰納法により，すべての $n\in \boldsymbol{N}$ に対し，$a_n=b_n$ がいえるから，数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ は一致する.

あとは，$b_4=m$ となるための条件を $a,\ m$ を用いて表せばよい.

$$\frac{b_2-a}{\ell}=1,\ b_3=(a+1)\left\{(\ell+1)-1\right\}+a=(a+1)\ell+a$$

$$\frac{b_3-a}{\ell}=a+1,\ b_4=(a+1)\left\{(\ell+1)^{a+1}-1\right\}+a=(a+1)(\ell+1)^{a+1}-1$$

よって，求める条件は

$$m=(a+1)(\ell+1)^{a+1}-1$$