

問題 A

2条件 (1), (2) を満たす数列 $\{a_n\}$ が存在すると仮定する. まず, この仮定の下で

$$(3) \iff m = (a+1)(\ell+1)^{a+1} - 1 \cdots \textcircled{1}$$

となることを示す. $a_n < c$ ($c \in \mathbf{N}$) かつ $f(c) = a_n$ となる c のうち, 最小のものが a_{n+1} であることに注意しよう. さて

$$s = 1 \cdot (\ell+1) + a - 1, \quad t = a(\ell+1) + \ell, \quad u = a(\ell+1)^{a+1} + \sum_{i=0}^a \ell(\ell+1)^i$$

とおくと

$$s = \ell + a, \quad t = (a+1)\ell + a, \quad u = a(\ell+1)^{a+1} + (\ell+1)^{a+1} - 1 = (a+1)(\ell+1)^{a+1} - 1$$

$$f(s) = a, \quad f(t) = s, \quad f(u) = a + (a+1)\ell = t \quad (a < s < t < u)$$

である. また, a_2 を $\ell+1$ 進表示したときの桁数が 1 ならば

$$a = a_1 = f(a_2) = a_2$$

となるが, これは起こり得ない. したがって, $a_2 = s$ である. 次に, $c \leq t$ を満たす $c \in \mathbf{N}$ を

$$c = c_1(\ell+1) + c_2 \quad (c_i \ (i=1, 2) \text{ は } 0 \leq c_i \leq \ell \text{ である整数})$$

と表示すると, $c_1 \leq a$ であり

$$f(c) = c_1 + c_2 \leq a + \ell = a_2$$

ここで, $f(c) = a_2$ となるのは, $c_1 = a$ かつ $c_2 = \ell$, つまり $c = t$ のときである. よって, $a_3 = t$ であり, 同様に $a_4 = u$ もいえる. ゆえに, $\textcircled{1}$ は成り立つ.

あとは, (1) かつ (2) を満たす数列 $\{a_n\}$ が存在することをいえばよい. 以下, この数列が次の漸化式によって定まることを数学的帰納法を用いて示す.

$$a_1 = a, \quad a_2 = \ell + a$$

$$(*) \quad a_{n+1} = a(\ell+1)^{\alpha_n} + \sum_{i=0}^{\alpha_n-1} \ell(\ell+1)^i \quad \left(\text{ただし } \alpha_n = \frac{a_n - a}{\ell} \right) \quad (n = 2, 3, \dots)$$

先に述べたことから, $a_2 = \ell + a$, $a_3 = (a+1)\ell + a$ であり

$$a_2 = \frac{a_2 - a}{\ell} = 1 \in \mathbf{N}, \quad a_3 = a(\ell+1) + \ell$$

したがって, $n = 2$ のとき, $\alpha_n \in \mathbf{N}$ かつ $(*)$ が成り立つ. 次に, 2 以上の任意の $n \in \mathbf{N}$ に対し, $\alpha_n \in \mathbf{N}$ かつ $(*)$ が成り立つとする. このとき, $(*)$ により

$$a_{n+1} \equiv a \pmod{\ell}, \quad a_{n+1} > a, \quad \alpha_{n+1} \in \mathbf{N} \quad (a_{n+1} = a + \alpha_{n+1}\ell)$$

さらに, 前半の議論と同様にして

$$a_{n+2} = a(\ell+1)^{\alpha_{n+1}} + \sum_{i=0}^{\alpha_{n+1}-1} \ell(\ell+1)^i$$

もいえる. よって, 2 以上のすべての $n \in \mathbf{N}$ に対し, $\alpha_n \in \mathbf{N}$ かつ $(*)$ が成り立つから, 2 条件 (1), (2) を満たす数列 $\{a_n\}$ は存在する.

以上により, 求める必要十分条件は

$$m = (a+1)(\ell+1)^{a+1} - 1$$