数学解法コンテスト　第14回

問題A

　xy平面において，原点Oを中心とする半径$\sqrt{2}$の円をCとする．このとき，次の条件を満たす3以上8以下の整数nをすべて求めよ．
　条件：Cに内接する正n角形で，頂点がすべて有理点であるものが存在する．
ただし，有理点とは各座標の値がすべて有理数である点のことである．

問題B

　ℓを複素数の定数とする．

$$a+\frac{1}{b}=b+\frac{1}{c}=c+\frac{1}{d}=d+\frac{1}{e}=e+\frac{1}{a}=\ell$$

を満たす複素数$a,\ b,\ c,\ d,\ e$の組で，

$$a=b=c=d=e$$

でないものが存在するために，ℓの満たすべき必要十分条件を求めよ．

数学解法コンテスト　第14回　解答例

問題 A

4 つの有理点 $\mathrm{A}_1(1,\ 1)$, $\mathrm{A}_2(-1,\ 1)$, $\mathrm{A}_3(-1,\ -1)$, $\mathrm{A}_4(1,\ -1)$ は C に内接する正 4 角形の 4 頂点であるから，$n=4$ は条件を満たす．

次に，n ($n=3$ または $5 \leqq n \leqq 8$) が条件を満たすと仮定する．C に内接する正 n 角形の n 頂点で，すべて有理点であるものが存在するから，それらを反時計回りに A_1, A_2, $\cdots$, A_n とする．すると

$$\mathrm{A}_1(x_1,\ y_1),\ \mathrm{A}_2(x_2,\ y_2)\ \Big(x_i,\ y_i\ (i=1,\ 2)\ \text{は有理数}\Big)$$
$$x_1=\sqrt{2}\cos\alpha,\ y_1=\sqrt{2}\sin\alpha\ (0 \leqq \alpha < 2\pi)$$
$$x_2=\sqrt{2}\cos(\alpha+\theta_n),\ y_2=\sqrt{2}\sin(\alpha+\theta_n)\ \left(\theta_n=\frac{2\pi}{n}\right)$$

と表せて

$$x_2=x_1\cos\theta_n-y_1\sin\theta_n\ \cdots①$$
$$y_2=y_1\cos\theta_n+x_1\sin\theta_n\ \cdots②$$

$①\times x_1+②\times y_1$ と $②\times x_1-①\times y_1$ から

$$x_1x_2+y_1y_2=({x_1}^2+{y_1}^2)\cos\theta_n=2\cos\theta_n$$
$$x_1y_2-y_1x_2=({x_1}^2+{y_1}^2)\sin\theta_n=2\sin\theta_n$$

したがって，$2\cos\theta_n$, $2\cos\theta_n$ はいずれも有理数である．一方

$$2\sin\theta_3=2\sin\frac{2\pi}{3}=\sqrt{3}$$
$$2\sin\theta_6=2\sin\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$$
$$2\sin\theta_8=2\sin\frac{\pi}{4}=\sqrt{2}$$

これらはいずれも有理数ではないから $n=3,\ 6,\ 8$ は条件を満たさない．また

$$\begin{aligned}0&=\sin 3\theta_5-\sin(2\pi-2\theta_5)\qquad (\because\ 3\theta_5=2\pi-2\theta_5)\\&=\sin 2\theta_5\cos\theta_5+\cos 2\theta_5\sin\theta_5+\sin 2\theta_5\\&=2\sin\theta_5\cos^2\theta_5+(2\cos^2\theta_5-1)\sin\theta_5+2\sin\theta_5\cos\theta_5\end{aligned}$$

この両辺を $\sin\theta_5\ (\neq 0)$ で割ると

$$0=4\cos^2\theta_5+2\cos\theta_5-1=(2\cos\theta_5)^2+(2\cos\theta)-1$$
$$2\cos\theta_5=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\qquad (\because\ \cos\theta_5>0)$$

$\sqrt{5}$ は有理数ではないから $2\cos\theta_5$ も有理数ではない．したがって，$n=5$ は条件を満たさない．最後に $n=7$ も条件を満たさないことを示す．

$$\begin{aligned}0&=\sin 4\theta_7-\sin(2\pi-3\theta_7)=\sin 4\theta_7+\sin 3\theta_7\\&=2\sin 2\theta_7\cos 2\theta_7+\sin 2\theta_7\cos\theta_7+\cos 2\theta_7\sin\theta_7\\&=4\sin\theta_7\cos\theta_7(2\cos^2\theta_7-1)+2\sin\theta_7\cos^2\theta_7+(2\cos^2\theta_7-1)\sin\theta_7\end{aligned}$$

この両辺を $\sin\theta_7$ で割ると

$$0=(2\cos\theta_7)^3+(2\cos\theta_7)^2-2(2\cos\theta_7)-1$$

$\cos\theta_7$ が有理数ならば，$\cos\theta_7>0$ であるから

$$2\cos\theta_7=\frac{b}{a}\ (a,\ b\ \text{は互いに素である自然数})$$

とおけて

$$\left(\frac{b}{a}\right)^3+\left(\frac{b}{a}\right)^2-2\cdot\frac{b}{a}-1=0$$
$$b^3+a(b^2-2ab-a^2)=0$$

したがって，a は b^3 の約数であり，a, b は互いに素であるから $a=1$ である．よって

$$b^3+b^2-2b-1=0 \ \cdots③$$

すると b は 1 を割り切るから $b=\pm 1$ となるが，これは③を満たさないから $n=7$ は条件を満たさない．

以上により，求める n の値は

$$n=4$$

注意

1. $(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2=\overline{\mathrm{A_1A_2}}^2=\left(\sqrt{2}\right)^2+\left(\sqrt{2}\right)^2-2\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}\cos\theta_n$
   $|x_1y_2-y_1x_2|=2\triangle\mathrm{OA_1A_2}=\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}\sin\theta_n$

2. $z_k=x_k+iy_k\ (k=1,\ 2)$, $\alpha=\cos\theta_n+i\sin\theta_n$ とおくと $z_2=\alpha z_1$，$\alpha^n=1\ (\alpha \neq 1)$ であり，
   さらに $t=\alpha+\dfrac{1}{\alpha}$ とおくと $t=2\cos\theta_n$
   $n=7$ のとき
   $$\alpha^6+\alpha^5+\alpha^4+\alpha^3+\alpha^2+\alpha+1=0$$
   $$\alpha^3+\frac{1}{\alpha^3}+\alpha^2+\frac{1}{\alpha^2}+\alpha+\frac{1}{\alpha}+1=0 \qquad \left(\alpha^3+\frac{1}{\alpha^3}=t^3-3t,\ \alpha^2+\frac{1}{\alpha^2}=t^2-2\right)$$
   $$t^3+t^2-2t-1=0$$
   $\left(n=5\right.$ のとき，同様にして $t^2+t-1=0$ が示せる.$\left.\right)$

数学解法コンテスト　第14回　解答例

問題 B

$a,\ b,\ c,\ d,\ e$ は，$a=b=c=d=e$ でない複素数の組で

$$a+\frac{1}{b}=b+\frac{1}{c}=c+\frac{1}{d}=d+\frac{1}{e}=e+\frac{1}{a}=l\ \cdots ①$$

を満たすとする．このとき

$$a \neq 0,\ \frac{1}{b}=l-a \neq 0,\ b=\frac{1}{l-a}$$

$$\frac{1}{c}=l-b=l-\frac{1}{l-a}=\frac{l^2-1-la}{l-a} \neq 0,\ c=\frac{l-a}{l^2-1-la}$$

$$\frac{1}{d}=l-c=l-\frac{l-a}{l^2-1-la}=\frac{l^3-2l-(l^2-1)a}{l^2-1-la} \neq 0,\ d=\frac{l^2-1-la}{l^3-2l-(l^2-1)a}$$

$$\frac{1}{e}=l-d=l-\frac{l^2-1-la}{l^3-2l-(l^2-1)a}=\frac{l^4-3l^2+1-(l^3-2l)a}{l^3-2l-(l^2-1)a} \neq 0$$

$$e=\frac{l^3-2l-(l^2-1)a}{l^4-3l^2+1-(l^3-2l)a}$$

$$\frac{1}{a}=l-e=l-\frac{l^3-2l-(l^2-1)a}{l^4-3l^2+1-(l^3-2l)a}=\frac{l^5-4l^3+3l-(l^4-3l^2+1)a}{l^4-3l^2+1-(l^3-2l)a}\ \cdots ②$$

$$\left(\ l^5-4l^3+3l=l(l^4-3l^2+1)-(l^3-2l)\ \right)$$

②の分母をはらって整理すると

$$(l^4-3l^2+1)a^2-l(l^4-3l^2+1)a+l^4-3l^2+1=0$$

$l^4-3l^2+1 \neq 0$ ならば

$$a^2-la+1=0,\ l=a+\frac{1}{a}$$

であり，このとき①により $a=b=c=d=e$ となるが，これは仮定に反する．したがって

$$l^4-3l^2+1=0,\ l^2=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}=\left(\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}\right)^2$$

であるから

$$l=\frac{-1-\sqrt{5}}{2},\ \frac{1-\sqrt{5}}{2},\ \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\ \text{または}\ \frac{1+\sqrt{5}}{2}\ \cdots ③$$

逆に③が成り立つとする．

$$a \neq 0,\ a \neq l,\ a \neq \frac{l^2-1}{l},\ a \neq \frac{l^3-2l}{l^2-1},\ a \neq \frac{l^4-3l^2+1}{l^3-2l}\ \text{かつ}\ a^2-la+1 \neq 0$$

を満たす複素数 a を 1 つ選び，この a と l を用いて上記のように $b,\ c,\ d,\ e$ を定める．すると

$$a+\frac{1}{b}=b+\frac{1}{c}=c+\frac{1}{d}=d+\frac{1}{e}=l$$

が成り立ち，また

$$l-e=\frac{-(l^3-2l)}{-(l^3-2l)a}=\frac{1}{a},\ b-a=\frac{1}{l-a}-a=\frac{a^2-la+1}{l-a} \neq 0$$

となるから $e+\dfrac{1}{a}=l,\ a \neq b$ もいえる．(逆成立)

よって，条件を満たす複素数 $a,\ b,\ c,\ d,\ e$ の組が存在するのは

$$l=\frac{-1-\sqrt{5}}{2},\ \frac{1-\sqrt{5}}{2},\ \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\ \text{または}\ \frac{1+\sqrt{5}}{2}\ \text{のとき}$$