

問題 A

4つの有理点 $A_1(1, 1)$, $A_2(-1, 1)$, $A_3(-1, -1)$, $A_4(1, -1)$ は C に内接する正4角形の4頂点であるから、 $n = 4$ は条件を満たす。

次に、 n ($n = 3$ または $5 \leq n \leq 8$) が条件を満たすと仮定する。 C に内接する正 n 角形の n 頂点で、すべて有理点であるものが存在するから、それらを反時計回りに A_1, A_2, \dots, A_n とする。すると

$$A_1(x_1, y_1), A_2(x_2, y_2) \quad (x_i, y_i \ (i = 1, 2) \text{ は有理数})$$

$$x_1 = \sqrt{2} \cos \alpha, y_1 = \sqrt{2} \sin \alpha \quad (0 \leq \alpha < 2\pi)$$

$$x_2 = \sqrt{2} \cos(\alpha + \theta_n), y_2 = \sqrt{2} \sin(\alpha + \theta_n) \quad \left(\theta_n = \frac{2\pi}{n}\right)$$

と表せて

$$x_2 = x_1 \cos \theta_n - y_1 \sin \theta_n \quad \dots \textcircled{1}$$

$$y_2 = y_1 \cos \theta_n + x_1 \sin \theta_n \quad \dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1} \times x_1 + \textcircled{2} \times y_1$ と $\textcircled{2} \times x_1 - \textcircled{1} \times y_1$ から

$$x_1 x_2 + y_1 y_2 = (x_1^2 + y_1^2) \cos \theta_n = 2 \cos \theta_n$$

$$x_1 y_2 - y_1 x_2 = (x_1^2 + y_1^2) \sin \theta_n = 2 \sin \theta_n$$

したがって、 $2 \cos \theta_n, 2 \sin \theta_n$ はいずれも有理数である。一方

$$2 \sin \theta_3 = 2 \sin \frac{2\pi}{3} = \sqrt{3}$$

$$2 \sin \theta_6 = 2 \sin \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$$

$$2 \sin \theta_8 = 2 \sin \frac{\pi}{4} = \sqrt{2}$$

これらはいずれも有理数ではないから $n = 3, 6, 8$ は条件を満たさない。また

$$0 = \sin 3\theta_5 - \sin(2\pi - 2\theta_5) \quad (\because 3\theta_5 = 2\pi - 2\theta_5)$$

$$= \sin 2\theta_5 \cos \theta_5 + \cos 2\theta_5 \sin \theta_5 + \sin 2\theta_5$$

$$= 2 \sin \theta_5 \cos^2 \theta_5 + (2 \cos^2 \theta_5 - 1) \sin \theta_5 + 2 \sin \theta_5 \cos \theta_5$$

この両辺を $\sin \theta_5$ ($\neq 0$) で割ると

$$0 = 4 \cos^2 \theta_5 + 2 \cos \theta_5 - 1 = (2 \cos \theta_5)^2 + (2 \cos \theta_5) - 1$$

$$2 \cos \theta_5 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \quad (\because \cos \theta_5 > 0)$$

$\sqrt{5}$ は有理数ではないから $2 \cos \theta_5$ も有理数ではない。したがって、 $n = 5$ は条件を満たさない。最後に $n = 7$ も条件を満たさないことを示す。

$$0 = \sin 4\theta_7 - \sin(2\pi - 3\theta_7) = \sin 4\theta_7 + \sin 3\theta_7$$

$$= 2 \sin 2\theta_7 \cos 2\theta_7 + \sin 2\theta_7 \cos \theta_7 + \cos 2\theta_7 \sin \theta_7$$

$$= 4 \sin \theta_7 \cos \theta_7 (2 \cos^2 \theta_7 - 1) + 2 \sin \theta_7 \cos^2 \theta_7 + (2 \cos^2 \theta_7 - 1) \sin \theta_7$$

この両辺を $\sin \theta_7$ で割ると

$$0 = (2 \cos \theta_7)^3 + (2 \cos \theta_7)^2 - 2(2 \cos \theta_7) - 1$$

$\cos \theta_7$ が有理数ならば、 $\cos \theta_7 > 0$ であるから

$$2 \cos \theta_7 = \frac{b}{a} \quad (a, b \text{ は互いに素である自然数})$$

とおけて

$$\left(\frac{b}{a}\right)^3 + \left(\frac{b}{a}\right)^2 - 2 \cdot \frac{b}{a} - 1 = 0$$

$$b^3 + a(b^2 - 2ab - a^2) = 0$$

したがって、 a は b^3 の約数であり、 a, b は互いに素であるから $a = 1$ である。よって

$$b^3 + b^2 - 2b - 1 = 0 \dots \textcircled{3}$$

すると b は 1 を割り切るから $b = \pm 1$ となるが、これは $\textcircled{3}$ を満たさないから $n = 7$ は条件を満たさない。

以上により、求める n の値は

$$n = 4$$

注意

$$1. (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 = \overline{A_1 A_2}^2 = (\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2})^2 - 2 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cos \theta_n$$

$$|x_1 y_2 - y_1 x_2| = 2 \Delta O A_1 A_2 = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \sin \theta_n$$

$$2. z_k = x_k + i y_k \quad (k = 1, 2), \quad \alpha = \cos \theta_n + i \sin \theta_n \text{ とおくと } z_2 = \alpha z_1, \quad \alpha^n = 1 \quad (\alpha \neq 1) \text{ であり,}$$

$$\text{さらに } t = \alpha + \frac{1}{\alpha} \text{ とおくと } t = 2 \cos \theta_n$$

$n = 7$ のとき

$$\alpha^6 + \alpha^5 + \alpha^4 + \alpha^3 + \alpha^2 + \alpha + 1 = 0$$

$$\alpha^3 + \frac{1}{\alpha^3} + \alpha^2 + \frac{1}{\alpha^2} + \alpha + \frac{1}{\alpha} + 1 = 0 \quad \left(\alpha^3 + \frac{1}{\alpha^3} = t^3 - 3t, \quad \alpha^2 + \frac{1}{\alpha^2} = t^2 - 2 \right)$$

$$t^3 + t^2 - 2t - 1 = 0$$

($n = 5$ のとき、同様にして $t^2 + t - 1 = 0$ が示せる.)