

問題 B

a, b, c, d, e は, $a = b = c = d = e$ でない複素数の組で

$$a + \frac{1}{b} = b + \frac{1}{c} = c + \frac{1}{d} = d + \frac{1}{e} = e + \frac{1}{a} = l \dots \textcircled{1}$$

を満たすとする. このとき

$$a \neq 0, \frac{1}{b} = l - a \neq 0, b = \frac{1}{l - a}$$

$$\frac{1}{c} = l - b = l - \frac{1}{l - a} = \frac{l^2 - 1 - la}{l - a} \neq 0, c = \frac{l - a}{l^2 - 1 - la}$$

$$\frac{1}{d} = l - c = l - \frac{l - a}{l^2 - 1 - la} = \frac{l^3 - 2l - (l^2 - 1)a}{l^2 - 1 - la} \neq 0, d = \frac{l^2 - 1 - la}{l^3 - 2l - (l^2 - 1)a}$$

$$\frac{1}{e} = l - d = l - \frac{l^2 - 1 - la}{l^3 - 2l - (l^2 - 1)a} = \frac{l^4 - 3l^2 + 1 - (l^3 - 2l)a}{l^3 - 2l - (l^2 - 1)a} \neq 0$$

$$e = \frac{l^3 - 2l - (l^2 - 1)a}{l^4 - 3l^2 + 1 - (l^3 - 2l)a}$$

$$\frac{1}{a} = l - e = l - \frac{l^3 - 2l - (l^2 - 1)a}{l^4 - 3l^2 + 1 - (l^3 - 2l)a} = \frac{l^5 - 4l^3 + 3l - (l^4 - 3l^2 + 1)a}{l^4 - 3l^2 + 1 - (l^3 - 2l)a} \dots \textcircled{2}$$

$$(l^5 - 4l^3 + 3l = l(l^4 - 3l^2 + 1) - (l^3 - 2l))$$

②の分母をはらって整理すると

$$(l^4 - 3l^2 + 1)a^2 - l(l^4 - 3l^2 + 1)a + l^4 - 3l^2 + 1 = 0$$

$l^4 - 3l^2 + 1 \neq 0$ ならば

$$a^2 - la + 1 = 0, l = a + \frac{1}{a}$$

であり, このとき①により $a = b = c = d = e$ となるが, これは仮定に反する. したがって

$$l^4 - 3l^2 + 1 = 0, l^2 = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2} = \left(\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \right)^2$$

であるから

$$l = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}, \frac{1 - \sqrt{5}}{2}, \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \text{ または } \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \dots \textcircled{3}$$

逆に③が成り立つとする.

$$a \neq 0, a \neq l, a \neq \frac{l^2 - 1}{l}, a \neq \frac{l^3 - 2l}{l^2 - 1}, a \neq \frac{l^4 - 3l^2 + 1}{l^3 - 2l} \text{ かつ } a^2 - la + 1 \neq 0$$

を満たす複素数 a を1つ選び, この a と l を用いて上記のように b, c, d, e を定める. すると

$$a + \frac{1}{b} = b + \frac{1}{c} = c + \frac{1}{d} = d + \frac{1}{e} = l$$

が成り立ち, また

$$l - e = \frac{-(l^3 - 2l)}{-(l^3 - 2l)a} = \frac{1}{a}, b - a = \frac{1}{l - a} - a = \frac{a^2 - la + 1}{l - a} \neq 0$$

となるから $e + \frac{1}{a} = l, a \neq b$ もいえる. (逆成立)

よって, 条件を満たす複素数 a, b, c, d, e の組が存在するのは

$$l = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}, \frac{1 - \sqrt{5}}{2}, \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \text{ または } \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \text{ のとき}$$