数学解法コンテスト　第13回

問題A

自然数 n に対し，$x,\ y$ の整式 $f(x,\ y),\ g(x,\ y)$ を

$$x^n + y^n = (x+y)f(x,\ y),\quad x^n - y^n = (x-y)g(x,\ y)$$

で定める．p を奇数の素数とするとき，$n = p$ の場合と $n = p^2$ の場合について，次の条件 $(*)$ を満たす互いに素である自然数の組 $(k,\ l)$ をすべて求めよ．

$(*)$ $\left\{f(x,\ y)\right\}^k = \left\{g(x,\ y)\right\}^l$ となる自然数 $x,\ y$ がある．

問題B

xy 平面において，次の条件 $(*)$ を満たす，円 $C : x^2 + y^2 = 6^2$ の内部にある格子点 A の個数を求めよ．

$(*)$ 点 A を通る円 C の弦 PQ で，点 P, 点 Q における円 C の接線が格子点で交わるものが存在する．

数学解法コンテスト　第13回　解答例

問題A

$n = p^a \quad$ (p は奇数の素数で，$a = 1,\ 2$)

$\{f(x,\ y)\}^k = \{g(x,\ y)\}^l\ \cdots$①

($x,\ y,\ k,\ l$ は自然数で，$k,\ l$ は互いに素)

とし，

$x = Gs,\ y = Gt$ (G は $x,\ y$ の最大公約数で，$s,\ t$ は互いに素である自然数)

とおく．

$$f(x,\ y) = \sum_{i=0}^{n-1}(-1)^i x^{n-1-i}y^i,\ \ g(x,\ y) = \sum_{i=0}^{n-1} x^{n-1-i}y^i$$

であるから，①により

$$\{G^{n-1}f(s,\ t)\}^k = \{G^{n-1}g(s,\ t)\}^l$$

また，

$$g(s,\ t) > f(s,\ t) = \frac{s^n+t^n}{s+t} > 1 \quad (\because\ n \geqq 3)$$

であるから

$$\{G^{n-1}f(s,\ t)\}^k > \{G^{n-1}f(s,\ t)\}^l$$

したがって，$k > l$ であり

$$G^{(n-1)(k-l)}\{f(s,\ t)\}^k = \{g(s,\ t)\}^l\ \cdots②$$

I. $f(s,\ t) > 1$ の場合

$f(s,\ t)$ の素因数のうちの1つを q とする．②により，q は $g(s,\ t)$ の素因数である．一方，$s,\ t$ は互いに素である自然数であるから，次の (i) または (ii) が成り立つ．

(i) $s,\ t$ はともに奇数　　　(ii) $s,\ t$ の一方は奇数，他方は偶数

したがって，

$$g(s,\ t) = \sum_{i=0}^{n-1} s^{n-1-i}t^i \quad \text{(これは } n \text{ 項の和であり，} n \text{ は奇数であることに注意)}$$

は奇数であるから，q も奇数である．また，この式により，q が $s,\ t$ の一方を割り切れば，他方も割り切れることになり，$s,\ t$ のとり方に反する．よって，q は s も t も割り切らない．次に，n は3以上の奇数であるから，$n = 2m+1$ (m は自然数) とおく．これを用いて

$$g(s,\ t) - f(s,\ t) = \sum_{i=0}^{n-1}\{1-(-1)^i\}s^{n-1-i}t^i$$

$$g(s,\ t) + f(s,\ t) = \sum_{i=0}^{n-1}\{1+(-1)^i\}s^{n-1-i}t^i$$

を変形すると

$$\begin{aligned} g(s,\ t) - f(s,\ t) &= 2\sum_{j=1}^{m} s^{2m-(2j-1)}t^{2j-1} \\ &= 2st\sum_{j=1}^{m} s^{2(m-j)}t^{2(j-1)} \\ &= 2st\sum_{j=0}^{m-1} s^{2(m-1-j)}t^{2j} \quad (j-1 \text{ を } j \text{ に置きなおした}) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
g(s,\ t)+f(s,\ t) &= 2\sum_{j=0}^{m} s^{2m-2j}t^{2j} \\
&= 2s^2\sum_{j=0}^{m-1} s^{2(m-1-j)}t^{2j}+2t^{2m}
\end{aligned}
$$

q は $g(s,\ t)\pm f(s,\ t)$ を割り切るから，以上で述べたことにより，$\displaystyle\sum_{j=0}^{m-1} s^{2(m-1-j)}t^{2j}$ の約数であり，t を割り切る．これは q が t の約数でないことに矛盾するから，この場合は起こり得ない．

II. $f(s,\ t)=1$ の場合

$$s^n+t^n=(s+t)f(s,\ t)=s+t\leqq s^n+t^n \quad (s\leqq s^n,\ t\leqq t^n)$$

であるから，$s=s^n$, $t=t^n$, $s=t=1$ がいえて，②から

$$G^{(n-1)(k-l)}=\{g(1,\ 1)\}^l=n^l \quad (n=p^a)$$

したがって，$G>1$ であり，G は p 以外の素因数をもたないから，$G=p^u$ (u は自然数) とおけて，

$$p^{(p^a-1)(k-l)u}=p^{al}$$

$$(p^a-1)(k-l)=al$$

(1) $a=1$ のとき

$$(p-1)(k-l)u=l$$

$$(p-1)uk=\{(p-1)u+1\}l$$

$$\frac{k}{l}=\frac{(p-1)u+1}{(p-1)u} \quad \big((p-1)u+1,\ (p-1)u \text{ は互いに素である自然数}\big)$$

(2) $a=2$ のとき

$$(p^2-1)(k-l)u=2l$$

$$(p^2-1)uk=\{(p^2-1)u+2\}l$$

$$\frac{k}{l}=\frac{\dfrac{(p^2-1)u}{2}+1}{\dfrac{(p^2-1)u}{2}} \quad \left(\frac{(p^2-1)u}{2}+1,\ \frac{(p^2-1)u}{2}\text{は互いに素である自然数}\right)$$

よって，求める組 $(k,\ l)$ は

$$
\begin{cases}
n=p \text{ のとき} \quad (k,\ l)=\big((p-1)u+1,\ (p-1)u\big)\ (u=1,\ 2,\ 3,\ \cdots) \\
n=p^2 \text{ のとき} \quad (k,\ l)=\left(\dfrac{(p^2-1)u}{2}+1,\ \dfrac{(p^2-1)u}{2}\right)\ (u=1,\ 2,\ 3,\cdots)
\end{cases}
$$

数学解法コンテスト　第13回　解答例

問題 B

条件 $(*)$ を満たす C 内の格子点 A 全体の集合を S とし，C に内接する正 8 角形の頂点を反時計回りに A_1，A_2，A_3，A_4，A_5，A_6，A_7，A_8 とする $\bigl($ただし，$\mathrm{A}(6,\ 0)\bigr)$．また，S に含まれる線分 OA_i $(i=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 8)$ 上の点の個数を u_i とし，S に含まれる扇形 $\mathrm{OA}_i\mathrm{A}_{i+1}$ $(i=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 8)$ $\bigl($ただし，$\mathrm{A}_9=\mathrm{A}_1\bigr)$ の内部の点の個数を v_i とする．

原点に関する対称移動，y 軸に関する対称移動，直線 $y=x$ に関する対称移動は，いずれも S の要素を S の要素に移すから，このことを用いて

$$u_1=u_3=u_5=u_7,\quad u_2=u_4=u_6=u_8$$
$$v_1=v_2=v_3=v_4=v_5=v_6=v_7=v_8$$

がいえる．したがって，S の要素の個数は $4u_1+4u_2+8v_1$ である．

次に，$\mathrm{A}\in S$ を固定し，A の座標を $(a,\ b)$ とおく．また，A を通る C の動弦で，C の直径でないものを PQ とし，P, Q における C の接線の交点を $\mathrm{R}(c,\ d)$ とする．このとき，

$$0<a^2+b^2<6^2<c^2+d^2$$

であることに注意する．

さて，R の軌跡を T とし，T が直線 $l: ax+by=6^2$ に一致することを示す．$\mathrm{OP}\perp\mathrm{PR}$ であるから，三平方の定理により

$$\mathrm{PR}^2=\mathrm{OR}^2-\mathrm{OP}^2=c^2+d^2-6^2$$

同様にして，$\mathrm{QR}^2=\mathrm{OR}^2-\mathrm{OQ}^2=c^2+d^2-6^2$ がいえるから，2 点 P, Q は，いずれも 2 つの円

$$x^2+y^2=6^2 \qquad \cdots①$$
$$(x-c)^2+(y-d)^2=c^2+d^2-6^2 \qquad \cdots②$$

上にあり，ともに

$$①-②: 2cx+2dy-c^2-d^2=-c^2-d^2+2\cdot 6^2,\ \text{つまり}\ cx+dy=6^2$$

を満たす．したがって，$\mathrm{PQ}: cx+dy=6^2$ であり，A はこの直線上の点であるから

$$ac+bd=6^2$$

よって，$\mathrm{R}\in l$ である．逆に，$\mathrm{R}'(c',\ d')$ を l 上の任意の点とする．

$$\bigl(\text{O から } l \text{ までの距離}\bigr)=\frac{6^2}{\sqrt{a^2+b^2}}>\frac{6^2}{\sqrt{6^2}}=6$$

であるから，R' は C の外部の点であり，R' から C に引いた 2 接線の接点を P', Q' とすると，先の議論と同様にして

$$\mathrm{P}'\mathrm{Q}': c'x+d'y=6^2$$

がいえる．さらに，$ac'+bd'=6^2$ が成り立つから，C の弦 $\mathrm{P}'\mathrm{Q}'$ は A を通る．よって，$\mathrm{R}'\in T$ であり，$T=l$ となる．

ゆえに，C の内部にある格子点 $\mathrm{A}(a,\ b)$ に対して，

$$(*)\iff l \text{ が格子点を含む}$$
$$\iff ax+by=6^2 \text{ を満たす整数 } x,\ y \text{ が存在する}$$
$$(\implies a,\ b \text{ の最大公約数は } 6^2 \text{を割り切る.})$$

(1) 線分 OA_1 上の点で S に含まれるものは

$(1,\ 0)$ $\quad\bigl(\because\ 1\cdot 36+0\cdot 0=6^2\bigr)$

$(2,\ 0)$ $\quad\bigl(\because\ 2\cdot 18+0\cdot 0=6^2\bigr)$

$(3,\ 0)$ $\quad\bigl(\because\ 3\cdot 12+0\cdot 0=6^2\bigr)$

$(4,\ 0)$ $\quad\bigl(\because\ 4\cdot 9+0\cdot 0=6^2\bigr)$

(2) 線分 OA_2 上の点で S に含まれるものは

$(1,\ 1)\quad (\because\ 1\cdot 18 + 1\cdot 18 = 6^2)$
$(2,\ 2)\quad (\because\ 2\cdot 9 + 2\cdot 9 = 6^2)$
$(3,\ 3)\quad (\because\ 3\cdot 6 + 3\cdot 6 = 6^2)$
$(4,\ 4)\quad (\because\ 4\cdot 4 + 4\cdot 5 = 6^2)$

(3) 扇形 $\mathrm{OA}_1\mathrm{A}_2$ の内部の点で S に含まれるものは

$(2,\ 1)\quad (\because\ 2\cdot 12 + 1\cdot 12 = 6^2)$
$(3,\ 1)\quad (\because\ 3\cdot 9 + 1\cdot 9 = 6^2)$
$(3,\ 2)\quad (\because\ 3\cdot 36 + 2\cdot(-36) = 6^2)$
$(4,\ 1)\quad (\because\ 4\cdot 12 + 1\cdot(-12) = 6^2)$
$(4,\ 2)\quad (\because\ 4\cdot 6 + 2\cdot 6 = 6^2)$
$(4,\ 3)\quad (\because\ 4\cdot 36 + 3\cdot(-36) = 6^2)$
$(5,\ 1)\quad (\because\ 5\cdot 6 + 1\cdot 6 = 6^2)$
$(5,\ 2)\quad (\because\ 5\cdot 12 + 2\cdot(-12) = 6^2)$
$(5,\ 3)\quad (\because\ 5\cdot 18 + 3\cdot(-18) = 6^2)$

よって，$u_1 = u_2 = 4,\ v_1 = 9$ であるから，求める個数は

$$4u_1 + 4u_2 + 8v_1 = 16 + 16 + 72 = 104$$

【注釈】

C の内部にある原点と異なる格子点 $\mathrm{A}(a,\ b)$ に対し，

$ax + by = 6^2$ を満たす整数 $x,\ y$ が存在する
$\iff$ $a,\ b$ の最大公約数が 6^2 を割り切る．

が成り立つ．これを次のように示し，解答に用いていもよい．

$\Longrightarrow$ は明らかであるから，$\Longleftarrow$ を示す．$a,\ b$ の最大公約数を g とし，

$6^2 = gc$ （c は自然数)
$a = a'g,\ \ b = b'g$ （$a',\ b'$ は互いに素である整数)
$U = \{\, a'x + b'y \mid x,\ y$ は整数 $\}$

とおく．

$$\pm a' = a'\cdot(\pm 1) + b'\cdot 0,\ \ \pm b' = a'\cdot 0 + b'\cdot(\pm 1)\ \ (\text{複号同順})$$

であるから，$\pm a',\ \pm b'$ はいずれも U に含まれ，またそのうちの少なくとも 1 つは正である．したがって，U に含まれる自然数のうちには最小であるものが存在するから，それを d とし，

$d = a'x_0 + b'y_0$ （$x_0,\ y_0$ は整数)

とおく．U の任意の要素を $a'x + b'y$ ($x,\ y$ は整数) とし，これを d で割ったときの商を q，余りを r ($0 \leqq r < d$) とおくと

$$a'x + b'y = dq + r = (a'x_0 + b'y_0)q + r$$
$$r = a'(x - qx_0) + b'(y - qy_0) \in U$$

$r \geqq 1$ ならば，r は U に含まれる d より小さい自然数となり，これは d のとり方に反する．よって，$r = 0$ であるから，U の任意の要素は d の倍数である．特に，互いに素である整数 $a',\ b'$ も d の倍数となるから $d = 1$ である．ゆえに，整数 $x,\ y$ を $x = cx_0,\ y = cy_0$ で定めると

$$ax + by = a(cx_0) + b(cy_0) = gc(a'x_0 + b'y_0) = 6^2 d = 6^2$$