第12回数学解法コンテスト　問題・解答例

(問題 1)

(a, b, c) を最大公約数が 1 である自然数の組とし，次の条件を考える。

(∗) 点 A, B, C を 3 頂点とする三角形で，$\angle A = 60^\circ$, BC$= a$, CA$= b$, AB$= c$ となるものがある。

(∗)を満たす組 (a, b, c) は，無限に存在することを示せ。 また，これらの組のうち，a, b, c がいずれも 40 以下となるものの個数を求めよ。

(問題 2)

$\triangle A_1A_2A_3$ を T，その内部を T' とし，T' 上の任意の点を P とする。$\angle A_i$ の二等分線に関して直線 $A_iP\,(i = 1, 2, 3)$ と対称な直線を l_i とするとき，3 直線 l_1, l_2, l_3 は 1 点で交わることを示せ。次にこの交点を Q とし，T' に含まれる図形 U に対し，$f(U) = \{Q \mid P \in U\}$ とおく。T に含まれる 6 個の三角形 $T_1, T_2, \cdots, T_6$ で，次の 2 条件 $(\alpha), (\beta_1)$ を満たすものと，$(\alpha), (\beta_2)$ を満たすものが存在することを示せ。ただし，T の 面積を S，T_i の面積を S_i とし，T_i の内部を T_i' とする $(i = 1, 2, \cdots, 6)$。

(α) $S_1 + S_2 + \cdots + S_6 = S$ かつ $f(T_i' \cup T_{i+1}') = T_i' \cup T_{i+1}'$ $(i = 1, 3, 5)$

(β_1) $T' \cap T_1 \cap T_2 \cap \cdots \cap T_6 \neq \emptyset$,　(β_2) $T' \cap T_1 \cap T_2 \cap \cdots \cap T_6 = \emptyset$

問題1　解答例

(解答例)

以下, 自然数 x, y, z に対し, x, y の最大公約数を $\gcd(x, y)$, x, y, z の最大公約数を $\gcd(x, y, z)$ と書くことにする。また, x が y を割り切ることを $x \mid y$ で, 割り切らないことを $x \nmid y$ で表すことにする。

$S = \{(a, b, c) \mid a, b, c$ は自然数で, $\gcd(a, b, c) = 1$ かつ $(*)$ を満たす $\}$

とおき, $(a, b, c) \in S$ とする。このとき,

$(*) \iff$ ① $a^2 = b^2 - bc + c^2$ (余弦定理による)

$\gcd(a, b, c) = 1 \iff \gcd(b, c) = 1 \iff \gcd(a, b) = 1 \iff \gcd(a, s) = 1$

($\gcd(b, c) = 1$ ならば, 明らかに $\gcd(a, b, c) = 1$ であり, $\gcd(b, c) > 1$ ならば, ① により $\gcd(b, c)$ の素因数は a を割り切るから $\gcd(a, b, c) > 1$ である。したがって, 最初の $\iff$ がいえて, 残りの $\iff$ も同様の議論を用いて示せる。)

また, $x = \dfrac{b}{a}, y = \dfrac{c}{a}$ とおくと, x, y は正の有理数であり, ① から

$x^2 - xy + y^2 = 1$

さらに $m = \dfrac{y+1}{x+1}$ とおくと, m は正の有理数であり, この式と上の式から y を消去すると

$x^2 - x(mx + m - 1) + (mx + m - 1)^2 = 1$

$(m^2 - m + 1)x^2 + (2m^2 - 3m + 1)x + m^2 - 2m = 0$

$m^2 - m + 1 = \left(m - \dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{3}{4} > 0$ に注意してこの式を変形すると

$(x+1)\left(x - \dfrac{2m - m^2}{m^2 - m + 1}\right) = 0$

$x \neq -1$ であるから

$x = \dfrac{2m - m^2}{m^2 - m + 1}$

$y = m \cdot \dfrac{2m - m^2}{m^2 - m + 1} + m - 1 = \dfrac{2m - 1}{m^2 - m + 1}$

したがって,

$m = \dfrac{l}{k}$ (k, l は $\gcd(k, l) = 1$ を満たす自然数)

$A = k^2 - kl + l^2$, $B = (2k - l)l$, $C = k(2l - k)$

とおくと, A, B, C は整数であり,

$\dfrac{b}{a} = \dfrac{B}{A}$, $\dfrac{c}{a} = \dfrac{C}{A}$, $A^2 = B^2 - BC + C^2$

が成り立つ。ここで, $A = \left(k - \dfrac{l}{2}\right)^2 + \dfrac{3l^2}{4} > 0$ であるから , $B > 0, C > 0$, すなわち

② $2k - l > 0$ かつ $2l - k > 0$

となる。一方, $\gcd(2k - l, k), \gcd(l, 2l - k)$ はいずれも $\gcd(k, l) = 1$ に等しいから, このことを用いて

$$
\begin{aligned}
\gcd(B, C) &= \gcd(2k - l, 2l - k) \\
&= \gcd(2k - l, 3k) \ (\because\ 3k = 2(2k - l) + 2l - k) \\
&= \gcd(k + l, 3k) \ (\because\ k + l = 3k - (2k - l))
\end{aligned}
$$

$$= \gcd(k+l, 3)\ (\because \gcd(k+l, k) = \gcd(k, l) = 1)$$

がいえる。したがって, $3 \nmid k+l$, すなわち $\gcd(B, C) = 1$ のときは

$$\gcd(A, B) = \gcd(A, C) = 1,\ a = A,\ b = B,\ c = C$$

また, $3 \mid k+l$, すなわち $\gcd(B, C) = 3$ のときは, $3 \mid A$ であり,

$$A = 3A',\ B = 3B',\ C = 3C'\ (A', B', C' \text{は自然数で}, \gcd(B', C') = 1)$$

とおけて

$$\frac{b}{a} = \frac{B'}{A'},\ \frac{c}{a} = \frac{C'}{A'},\ A'^2 = B'^2 - B'C' + C'^2$$
$$\gcd(A', B') = \gcd(A', C') = 1,\ a = A',\ b = B',\ c = C'$$

逆に k, l を $\gcd(k, l) = 1$ かつ②を満たす自然数とし, $A, B, C, A', B', C', a, b, c$ を上のように定めると $(a, b, c) \in S$ である。また,

$$b - c > 0 \iff B - C = (k+l)(k-l) > 0$$

であるから, $b > c$ となるのは $k > l$ のときである。

(注意：$k > l$ かつ② $\iff \dfrac{k}{2} < l < k$)

このとき, $b^2 - a^2 = (b-c)c > 0,\ a < b$ であり, $\max\{a, b, c\} = b$ となる。

— 問の前半の証明 —

S の要素が無数にあることを示せばよい。$n = 1, 2, 3, \cdots$ に対して, 自然数 k_n, l_n を $k_n = 3n+1, l_n = 3n$ で定め,

$$(a_n, b_n, c_n) = (k_n^2 - k_n l_n + l_n^2, (2k_n - l_n)l_n, k_n(2l_n - k_n))$$

とおく。すると,

$$k_n - l_n = 1,\ \frac{3n+1}{2} < 3n < 3n+1,\ k_n + l_n = 6n+1$$
$$\gcd(k_n, l_n) = 1,\ \frac{k_n}{2} < l_n < k_n \text{ かつ } 3 \nmid k_n + l_n$$

成り立つから, $(a_n, b_n, c_n) \in S$ がいえる。また, $a_n = 9n^2 + 3n + 1\ (n = 1, 2, 3, \cdots)$ であり, これは n の単調増加関数である。よって, S の要素は無限に存在する。

— $\max\{a, b, c\} \leqq 40$ を満たす $(a, b, c) \in S$ の個数が 21 であることの証明 —

まず, $b > c$ かつ $\max\{a, b, c\} \leqq 40$ を満たす $(a, b, c) \in S$ の個数を求める。

I. $3 \nmid k+l$ の場合

$\dfrac{k}{2} < l$ に注意して

$$40 \geqq b = (2k-l)l = -(k-l)^2 + k^2 > -\left(k - \frac{k}{2}\right)^2 + k^2 = \frac{3k^2}{4}$$
$$k^2 \leqq \frac{160}{3} = 53 + \frac{1}{3},\ k \leqq 7\ \ (\because 7^2 < 53 + \frac{1}{3} < 8^2)$$

したがって, 条件を満たす $(a, b, c) \in S$ に対応する (k, l) は, 次のいずれかである。

$(7, 6)$ ($b = 48 > 40$ であるから不適)

$(7, 4)$ ($(a, b, c) = (37, 40, 7)$ $\cdots$適)

$(6, 5)$ ($(a, b, c) = (31, 35, 24)$ $\cdots$適)

$(5, 3)$ ($(a, b, c) = (19, 21, 5)$ $\cdots$適)

$(4, 3)$ ($(a, b, c) = (13, 15, 8)$ $\cdots$適)

$(3, 2)$ ($(a, b, c) = (7, 8, 3)$ $\cdots$適)

II. $3 \mid k+l$ の場合

$40 \geqq b = \dfrac{(2k-l)l}{3},\ 120 \geqq (2k-l)l > \dfrac{3k^2}{4}$

$k^2 < \dfrac{120 \cdot 4}{3} = 160,\ k \leqq 12\ \ (\because\ 12^2 = 144 < 160 < 169 = 13^2)$

したがって, 条件を満たす $(a,b,c) \in S$ に対応する (k,l) は 次のいずれかである。

$(11,10)$ ($(a,b,c) = (37,40,33)$ $\cdots$適)

$(11,7)$ ($(a,b,c) = (31,35,11)$ $\cdots$適)

$(8,7)$ ($(a,b,c) = (19,21,16)$ $\cdots$適)

$(7,5)$ ($(a,b,c) = (13,15,7)$ $\cdots$適)

$(5,4)$ ($(a,b,c) = (7,8,5)$ $\cdots$適)

I,II により, 条件を満たす $(a,b,c) \in S$ は $5+5=10$ 個 ある。

また, 条件「$\gcd(b,c)=1$, ①かつ $\max\{a,b,c\} \leqq 40$」は b,c に関して対称であるから, $b<c$ かつ $\max\{a,b,c\} \leqq 40$ を満たす $(a,b,c) \in S$ も 10 個 ある。

次に, $b=c$ かつ $\max\{a,b,c\} \leqq 40$ を満たす $(a,b,c) \in S$ を求める。$\gcd(b,c)=1$ と①から $b=c=1, a=1$, つまり $(a,b,c)=(1,1,1)$ である。

以上により, 求める個数は

$10+10+1=21$(個)

(別解)

以下, 自然数 x,y,z に対し, x,y の最大公約数を $\gcd(x,y)$, x,y,z の最大公約数を $\gcd(x,y,z)$ と書くことにする。また, x が y を割り切ることを $x \mid y$ で, 割り切らないことを $x \nmid y$ で表すことにする。

$S = \{(a,b,c) \mid a,b,c$ は自然数で, $\gcd(a,b,c)=1$ かつ $(*)$ を満たす $\}$

とおき, $(a,b,c) \in S$ とする。このとき,

$(*) \iff$ ① $a^2 = b^2 - bc + c^2$ (余弦定理による)

$\iff (2a)^2 = (2b-c)^2 + 3c^2$

$\iff$ ② $(2a+2b-c)(2a-2b+c) = 3c^2$

$\gcd(a,b,c)=1 \iff \gcd(b,c)=1$

($\gcd(b,c)=1$ ならば, 明らかに $\gcd(a,b,c)=1$ であり, $\gcd(b,c)>1$ ならば, ①により $\gcd(b,c)$ の素因数は a を割り切るから $\gcd(a,b,c)>1$ である)

まず, $b>c$ の場合を考える。このとき, $2a+2b-c>0$ であり, これと②から $2a-2b+c>0$ となる。ここで, $g=\gcd(2a+2b-c, 2a-2b+c)$ とおく。 はじめに, $g>1$ を仮定し, p を g の素因数とする。②から $p^2 \mid 3c^2$, $p \mid c$ であり,

$p \mid 4b = (2a+2b-c) - (2a-2b+c) + 2c$

したがって, $\gcd(b,c)=1$ を用いて $p \mid 4$, $p=2$ がいえる。よって, c は偶数, b は奇数であり, ①から a は奇数となる。また, $2x=2b-c$, $2y=c$ とおくと x,y は自然数

であり, ② の直前の式から $a^2 = x^2 + 3y^2$ となる。ここで, x が偶数であれば, 4 を法として

$$1 \equiv a^2 \equiv 3y^2 \equiv 0 \text{ または } 3$$

となるが, これは起こり得ない。したがって, x は奇数であり,

$$4 \mid 2a + 2b - c = 2(a + x), \;\; 4 \mid 2a - 2b + c = 2(a - x)$$

となるから $g \geqq 4$ である。一方,

$$g \mid 4a = (2a + 2b - c) + (2a - 2b + c)$$

であり, g は奇数の素因数をもたないから, $g \mid 4$, $g \leqq 4$ となる。よって, $g > 1$ ならば $g = 4 = 2^2$ である。ゆえに, ②の両辺の素因数分解を考えることにより, $g = 1$ の場合も含めて, 次の I または II を満たす自然数 m, n の存在がいえる。

I　$2a + 2b - c = 3m^2$ かつ $2a - 2b + c = n^2$

II　$2a + 2b - c = m^2$ かつ $2a - 2b + c = 3n^2$

$g = 4$ のときは, m, n は偶数であり, $g = 1$ のときは, m, n の少なくとも一方は奇数であるから c は奇数であり, m, n も奇数である。したがって, I, II いずれの場合にも,

$$2k = m + n, \; 2l = m - n, \;\text{ すなわち }\; m = k + l, \; n = k - l$$

を満たす整数 $k, l \, (0 < k > l)$ が存在し, ② から

$$c = mn = k^2 - l^2$$

I の場合

$$4a = 3m^2 + n^2 = 3(k + l)^2 + (k - l)^2 = 4(k^2 + kl + l^2)$$

$$2b = 3m^2 - 2a + c = 3(k + l)^2 - 2(k^2 + kl + l^2) + k^2 - l^2 = 2k^2 + 4kl$$

$$(\alpha) \;\; (a, b, c) = (k^2 + kl + l^2, k(k + 2l), (k + l)(k - l))$$

$0 < k > l, c > 0, 0 < b - c = (2k + l)l$ であるから, $2k + l > k + l > 0, l > 0$ となる。したがって, $0 < l < k$ であり, このとき, $k^2 + kl + l^2 > 0, k(k + 2l) > 0$ も成り立つ。また, $\gcd(b, c) = 1$ から $\gcd(k, l) = 1$ がいえて,

$$\gcd(k, k \pm l) = \gcd(k, l) = 1, \;\; \gcd(l, k \pm l) = \gcd(k, l) = 1$$

$$\gcd(k + 2l, k + l) = \gcd(l, k + l) = 1$$

$$\begin{aligned} 1 = \gcd(b, c) &= \gcd(k(k + 2l), (k + l)(k - l)) = \gcd(k + 2l, k - l) \\ &= \gcd(3l, k - l) = \gcd(3, k - l) \end{aligned}$$

が成り立つから, $3 \nmid k - l$ となる。したがって,

$$U = \{(k, l) \,|\, k, l \text{ は自然数で}, \gcd(k, l) = 1, \; l < k \;\text{ かつ }\; 3 \nmid k - l\}$$

とおくと,

$$(a, b, c) \in S, \; b > c \;\text{ かつ I を満たす自然数 } m, n \text{ がある}$$
$$\iff (\alpha) \text{ を満たす } (k, l) \in U \text{ がある}$$

また,

$$\begin{aligned} &(k_1^2 + k_1 l_1 + l_1^2, k_1(k_1 + 2l_1), (k_1 + l_1)(k_1 - l_1)) \\ &\quad = (k_2^2 + k_2 l_2 + l_2^2, k_2(k_2 + 2l_2), (k_2 + l_2)(k_2 - l_2)) \;\; ((k_i, l_i) \in U \, (i = 1, 2)) \end{aligned}$$

ならば,

$$2(k_i^2+k_il_i+l_i^2)-k_i(k_i+2l_i)-(k_i+l_i)(k_i-l_i)=3l_i^2\,(i=1,2))$$

を用いて $(k_1,l_1)=(k_2,l_2)$ がいえる。

— 問の前半の証明 —

$(k,l)=(l+1,l)\,(l=1,2,3,\cdots)$ とおくと $(k,l)\in U$ であり, この (k,l) を用いて (α) で組 $(a,b,c)\in S$ を定めると, 異なる l の値に対応する (a,b,c) は互いに異なる。よって, S に含まれる組 (a,b,c) は無限に存在する。

II の場合

$$4a=m^2+3n^2=(k+l)^2+3(k-l)^2=4(k^2-kl+l^2)$$
$$2b=m^2-2a+c=(k+l)^2-2(k^2-kl+l^2)+k^2-l^2=4kl-2l^2$$
$$(\beta)\ \ (a,b,c)=(k^2-kl+l^2,(2k-l)l,(k+l)(k-l))$$

$0<k>l, 0<b-c=k(2l-k)$ であるから, $2l-k>0$ となる。したがって, $\dfrac{k}{2}<l<k$ であり, このとき, $k^2-kl+l^2>0, (2k-l)l>0, (k+l)(k-l)>0$ も成り立つ。また, この場合も $\gcd(k,l)=1$ がいえて,

$$\gcd(k,k\pm l)=1,\ \gcd(l,k\pm l)=1$$
$$\gcd(2k-l,k-l)=\gcd(k,k-l)=1$$
$$\begin{aligned}1&=\gcd(b,c)=\gcd((2k-l)l,(k+l)(k-l))=\gcd(2k-l,k+l)\\&=\gcd(3k,k+l)=\gcd(3,k+l)\end{aligned}$$

が成り立つから, $3\nmid k+l$ となる。したがって,

$$V=\{(k,l)\,|\,k,l\text{ は自然数で},\gcd(k,l)=1,\ \frac{k}{2}<l<k\text{ かつ }3\nmid k+l\}$$

とおくと

$$(a,b,c)\in S,\ b>c\ \text{ かつ II を満たす自然数 } m,n \text{ がある}$$
$$\iff\ (\beta)\text{ を満たす }(k,l)\in V\text{ がある}$$

また,

$$\begin{aligned}&(k_1^2-k_1l_1+l_1^2,(2k_1-l_1)l_1,(k_1+l_1)(k_1-l_1))\\&\quad=(k_2^2-k_2l_2+l_2^2,(2k_2-l_2)l_2,(k_2+l_2)(k_2-l_2))\ \ ((k_i,l_i)\in V\,(i=1,2))\end{aligned}$$

ならば,

$$2(k_i^2l-k_il_i+l_i^2)+(2k_i-l_i)l_i+(k_i+l_i)(k_i-l_i)=3k_i^2\,(i=1,2))$$

を用いて $(k_1,l_1)=(k_2,l_2)$ がいえる。

— $\max\{a,b,c\}\leqq 40$ を満たす $(a,b,c)\in S$ の個数が 21 であることの証明 —

まず, $b>c$ かつ $\max\{a,b,c\}\leqq 40$ を満たす $(a,b,c)\in S$ の個数を求める。$b>c$ のとき, ①により $b^2-a^2=(b-c)c>0,\ a<b$ であり, $\max\{a,b,c\}=b$ となることに注意する。$(\alpha),(\beta)$ における b の表示を考えて,

$$W_1=\{(k,l)\,|\,(k,l)\in U\ \text{ かつ }\ k(k+2l)\leqq 40\}$$
$$W_2=\{(k,l)\,|\,(k,l)\in V\ \text{ かつ }\ (2k-l)l\leqq 40\}$$

とおく。$n(W_1)+n(W_2)$ の値を求めればよい。

$(k,l)\in W_1$ ならば,

$$40\geqq k(k+2l)\geqq k(k+2)\ \ (5(5+2)<40<6(6+2))$$

であるから $k\leqq 5$ であり,

$(k,l)=(5,4),\ (5,3),\ (5,1),\ (4,3),\ (3,2),\ (3,1),\ (2,1)$

$5(5+8)>5(5+6)>40=4(4+6)>5(5+2)>3(3+4)>3(3+2)>2(2+2)$

したがって, $n(W_1)=5$ である。

$(k,l)\in W_2$ ならば,

$$40\geqq(2k-l)l=-(k-l)^2+k^2>-\left(k-\frac{k}{2}\right)^2+k^2=\frac{3k^2}{4}$$

$$k^2\leqq\frac{160}{3}=53+\frac{1}{3},\ k\leqq 7\ \ (\because\ 7^2<53+\frac{1}{3}<8^2)$$

であるから

$(k,l)=(7,6),\ (7,4),\ (6,5),\ (5,3),\ (4,2),\ (3,2)$

$(14-6)6>40=(14-4)4>(12-5)5>(10-3)3>(8-3)3>(6-2)2$

したがって, $n(W_2)=5$ である。

よって, $b>c$ かつ $\max\{a,b,c\}\leqq 40$ を満たす $(a,b,c)\in S$ は $5+5=10$ 個 ある。

また, 条件「$\gcd(b,c)=1$, ①かつ $\max\{a,b,c\}\leqq 40$」は b,c に関して対称であるから, $b<c$ かつ $\max\{a,b,c\}\leqq 40$ を満たす $(a,b,c)\in S$ も 10 個 ある。

次に, $b=c$ かつ $\max\{a,b,c\}\leqq 40$ を満たす $(a,b,c)\in S$ を求める。$\gcd(b,c)=1$ と①から $b=c=1, a=1$, つまり $(a,b,c)=(1,1,1)$ である。

以上により, 求める個数は

$10+10+1=21$(個)

(別解) の註釈

$$\begin{aligned}(*)\ &\Longleftrightarrow ①\ a^2=b^2-bc+c^2\ (\text{余弦定理による})\\ &\Longleftrightarrow\ (2a)^2=(b+c)^2+3(b-c)^2\\ &\Longleftrightarrow ②'\ (2a+b+c)(2a-b-c)=3(b-c)^2\end{aligned}$$

であるから, ②の代わりに②$'$ を用いて論じてもよい。

問題2　解答例

(解答例)

$\mathrm{P} \in \mathring{T}$ に対して, $f(\mathrm{P}) = \mathrm{Q}$ とおく。このとき, $f(\mathrm{P})$ の定め方と $f(U)\,(U \subseteq \mathring{T})$ の定め方により,

$$f(\mathrm{P}) \in \mathring{T},\ \ f(U) \subseteq \mathring{T},\ \ f(f(\mathrm{P})) = \mathrm{P},\ \ f(f(U)) = U$$

となることに注意する。

$i = 1, 2, 3$ に対し, $\angle \mathrm{A}_i$ の二等分線を L_i とし, 3 直線 $\mathrm{A}_i\mathrm{P}, l_i, L_i$ と辺 $\mathrm{A}_{i+1}\mathrm{A}_{i+2}$ の交点を順に $\mathrm{B}_i, \mathrm{C}_i, \mathrm{D}_i$ とする (ただし, $\mathrm{A}_4 = \mathrm{A}_1, \mathrm{A}_5 = \mathrm{A}_2$)。$\mathrm{B}_1, \mathrm{C}_1$ がどの位置にあっても

$$\angle \mathrm{A}_2\mathrm{A}_1\mathrm{B}_1 = \angle \mathrm{A}_3\mathrm{A}_1\mathrm{C}_1,\ \ \angle \mathrm{A}_2\mathrm{A}_1\mathrm{C}_1 = \angle \mathrm{A}_3\mathrm{A}_1\mathrm{B}_1$$

となるから

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{A}_2\mathrm{B}_1}{\mathrm{A}_3\mathrm{B}_1} \cdot \frac{\mathrm{A}_2\mathrm{C}_1}{\mathrm{A}_3\mathrm{C}_1} &= \frac{\triangle \mathrm{A}_1\mathrm{A}_2\mathrm{B}_1 \times \triangle \mathrm{A}_1\mathrm{A}_2\mathrm{C}_1}{\triangle \mathrm{A}_1\mathrm{A}_3\mathrm{B}_1 \times \triangle \mathrm{A}_1\mathrm{A}_3\mathrm{C}_1} \\
&= \frac{\frac{1}{2}\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2 \cdot \mathrm{A}_1\mathrm{B}_1 \sin \angle \mathrm{A}_2\mathrm{A}_1\mathrm{B}_1 \times \frac{1}{2}\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2 \cdot \mathrm{A}_1\mathrm{C}_1 \sin \angle \mathrm{A}_2\mathrm{A}_1\mathrm{C}_1}{\frac{1}{2}\mathrm{A}_1\mathrm{A}_3 \cdot \mathrm{A}_1\mathrm{B}_1 \sin \angle \mathrm{A}_3\mathrm{A}_1\mathrm{B}_1 \times \frac{1}{2}\mathrm{A}_1\mathrm{A}_3 \cdot \mathrm{A}_1\mathrm{C}_1 \sin \angle \mathrm{A}_3\mathrm{A}_1\mathrm{C}_1} \\
&= \left(\frac{\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2}{\mathrm{A}_1\mathrm{A}_3}\right)^2
\end{aligned}$$

同様にして

$$\frac{\mathrm{A}_3\mathrm{B}_2}{\mathrm{A}_1\mathrm{B}_2} \cdot \frac{\mathrm{A}_3\mathrm{C}_2}{\mathrm{A}_1\mathrm{C}_2} = \left(\frac{\mathrm{A}_2\mathrm{A}_3}{\mathrm{A}_2\mathrm{A}_1}\right)^2,\ \ \frac{\mathrm{A}_1\mathrm{B}_3}{\mathrm{A}_2\mathrm{B}_3} \cdot \frac{\mathrm{A}_1\mathrm{C}_3}{\mathrm{A}_2\mathrm{C}_3} = \left(\frac{\mathrm{A}_3\mathrm{A}_1}{\mathrm{A}_3\mathrm{A}_2}\right)^2$$

もいえる。これら 3 つの式を辺々掛け合わせて

$$\frac{\mathrm{A}_2\mathrm{B}_1}{\mathrm{A}_3\mathrm{B}_1} \cdot \frac{\mathrm{A}_3\mathrm{B}_2}{\mathrm{A}_1\mathrm{B}_2} \cdot \frac{\mathrm{A}_1\mathrm{B}_3}{\mathrm{A}_2\mathrm{B}_3} \times \frac{\mathrm{A}_2\mathrm{C}_1}{\mathrm{A}_3\mathrm{C}_1} \cdot \frac{\mathrm{A}_3\mathrm{C}_2}{\mathrm{A}_1\mathrm{C}_2} \cdot \frac{\mathrm{A}_1\mathrm{C}_3}{\mathrm{A}_2\mathrm{C}_3} = 1$$

ここで, 「チェバの定理」により,

$$\frac{\mathrm{A}_2\mathrm{B}_1}{\mathrm{A}_3\mathrm{B}_1} \cdot \frac{\mathrm{A}_3\mathrm{B}_2}{\mathrm{A}_1\mathrm{B}_2} \cdot \frac{\mathrm{A}_1\mathrm{B}_3}{\mathrm{A}_2\mathrm{B}_3} = 1$$

であるから

$$\frac{\mathrm{A}_2\mathrm{C}_1}{\mathrm{A}_3\mathrm{C}_1} \cdot \frac{\mathrm{A}_3\mathrm{C}_2}{\mathrm{A}_1\mathrm{C}_2} \cdot \frac{\mathrm{A}_1\mathrm{C}_3}{\mathrm{A}_2\mathrm{C}_3} = 1$$

よって, 「チェバの定理の逆」により, l_1, l_2, l_3 は 1 点で交わる。

次に, $\triangle \mathrm{A}_1\mathrm{A}_2\mathrm{A}_3$ の内心を I とする。また, $\angle \mathrm{A}_1 = 6\theta$ とし, 辺 $\mathrm{A}_2\mathrm{A}_3$ 上に 7 点 $\mathrm{E}_0, \mathrm{E}_1, \mathrm{E}_2, \cdots, \mathrm{E}_6$ を $\angle \mathrm{A}_2\mathrm{A}_1\mathrm{E}_i = i\theta\,(i = 0, 1, 2, \cdots, 6)$ となるようにとる ($\mathrm{E}_0 = \mathrm{A}_2, \mathrm{E}_3 = \mathrm{D}_1, \mathrm{E}_6 = \mathrm{A}_3$である) 。そして, T に含まれる 6 個の三角形 $T_1, T_2, \cdots, T_6$を 次のように定める。

(1)　$T_1 = \triangle \mathrm{ID}_1\mathrm{A}_2$,　$T_2 = \triangle \mathrm{ID}_2\mathrm{A}_1$,　$T_3 = \triangle \mathrm{ID}_2\mathrm{A}_3$,　$T_4 = \triangle \mathrm{ID}_3\mathrm{A}_2$,
　　$T_5 = \triangle \mathrm{ID}_3\mathrm{A}_1$,　$T_6 = \triangle \mathrm{ID}_1\mathrm{A}_3$

(2)　$T_1 = \triangle \mathrm{A}_1\mathrm{E}_0\mathrm{E}_1$,　$T_2 = \triangle \mathrm{A}_1\mathrm{E}_5\mathrm{E}_6$,　$T_3 = \triangle \mathrm{A}_1\mathrm{E}_1\mathrm{E}_2$,　$T_4 = \triangle \mathrm{A}_1\mathrm{E}_4\mathrm{E}_5$,
　　$T_5 = \triangle \mathrm{A}_1\mathrm{E}_2\mathrm{E}_3$,　$T_6 = \triangle \mathrm{A}_1\mathrm{E}_3\mathrm{E}_4$,

(1) の場合

(α) の前半部分は明らかに成り立つ。また, $T_1 \cap T_2 \cap \cdots \cap T_6 = \{I\} \subseteq \mathring{T}$ であるから (β_1) も成り立つ。次に, $\mathrm{P} \in \mathring{T}_1$ とする。直線 $L_i\,(i=1,2,3)$ に関して P と $f(\mathrm{P})$ は反対側にあるから $f(\mathrm{P}) \in \mathring{T}_2$, $f(\mathring{T}_1) \subseteq \mathring{T}_2$ であり, $f(\mathring{T}_2) \subseteq \mathring{T}_1$ も同様に示せる。したがって,

$$\mathring{T}_2 \subseteq f(f(\mathring{T}_2)) \subseteq f(\mathring{T}_1) \subseteq \mathring{T}_2,\ \ \mathring{T}_2 = f(\mathring{T}_1),\ \ \mathring{T}_1 = f(f(\mathring{T}_1)) = f(\mathring{T}_2)$$

となるから

$$f(\mathring{T}_1 \cup \mathring{T}_2) = f(\mathring{T}_1) \cup f(\mathring{T}_2) = \mathring{T}_1 \cup \mathring{T}_2$$

同様にして $f(\mathring{T}_i \cup \mathring{T}_{i+1}) = \mathring{T}_i \cup \mathring{T}_{i+1}\,(i=3,5)$ もいえる。((α) の後半部分成立)

(2) の場合

(α) の前半部分は明らかに成り立つ。また, $T_1 \cap T_2 \cap \cdots \cap T_6 = \{\mathrm{A}_1\}$, $\mathrm{A}_1 \not\in \mathring{T}$ であるから (β_2) も成り立つ。次に, $\mathrm{P} \in \mathring{T}_i\,(i=1,3,5)$ とし, $\mathrm{Q} = f(\mathrm{P})$ とおく。$\angle \mathrm{A}_3\mathrm{A}_1\mathrm{Q} = \angle \mathrm{A}_2\mathrm{A}_1\mathrm{P}$ であるから $Q \in \mathring{T}_{i+1}$, $f(\mathring{T}_i) \subseteq \mathring{T}_{i+1}$ であり, この場合にも (α) の後半部分は成立する ((1) の場合の後半部分の議論参照)。

註釈 1

(「写像」の知識のある人用)

$\mathring{T}$ から $\mathring{T}$ への写像 f を $f(\mathrm{P}) = \mathrm{Q}\,(\mathrm{P} \in \mathring{T})$ によって定めると, f は全単射であり, 合成写像 $f \circ f$ は $\mathring{T}$ の恒等写像に一致する。

註釈 2

両端の点を除いた線分 $\mathrm{A_1B_1, A_1C_1, A_2B_2, A_2C_2, A_1A_3}$ を順に $\overset{\circ}{\mathrm{A_1B_1}}$, $\overset{\circ}{\mathrm{A_1C_1}}$, $\overset{\circ}{\mathrm{A_2B_2}}$, $\overset{\circ}{\mathrm{A_2C_2}}$, $\overset{\circ}{\mathrm{A_1A_3}}$ で表し, 以下, B_1 を固定して考える。P が $\overset{\circ}{\mathrm{A_1B_1}}$ 上を B_1 から A_1 に向かって動くとき, $\mathrm{B}_2\,(\mathrm{C}_2)$ は $\overset{\circ}{\mathrm{A_1A_3}}$ 上を A_3 から A_1 (A_1 から A_3) に向かって動き, 2 直線 $\mathrm{A_1C_1, A_2C_2}$, の交点である $f(\mathrm{P})$ は $\overset{\circ}{\mathrm{A_1C_1}}$ 上を A_1 から C_1 に向かって動く。したがって, $f(\overset{\circ}{\mathrm{A_1B_1}}) = \overset{\circ}{\mathrm{A_1C_1}}$ である。また, P が 2 直線 $\mathrm{A_1B_1, A_2D_2}$, の交点に一致するとき, $\mathrm{B_2 = C_2 = D_2}$ であり, $f(\mathrm{P})$ は 2 直線 $\mathrm{A_1C_1, A_2D_2}$, の交点に一致する。

註釈 3

点 O を始点とし,

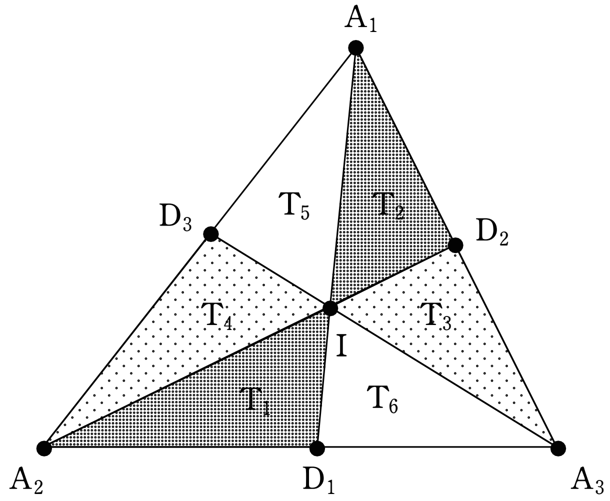
$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \frac{l\overrightarrow{\mathrm{OA_1}} + m\overrightarrow{\mathrm{OA_2}} + n\overrightarrow{\mathrm{OA_3}}}{l+m+n} \quad (l>0, m>0, n>0)$$

と表示するとき,

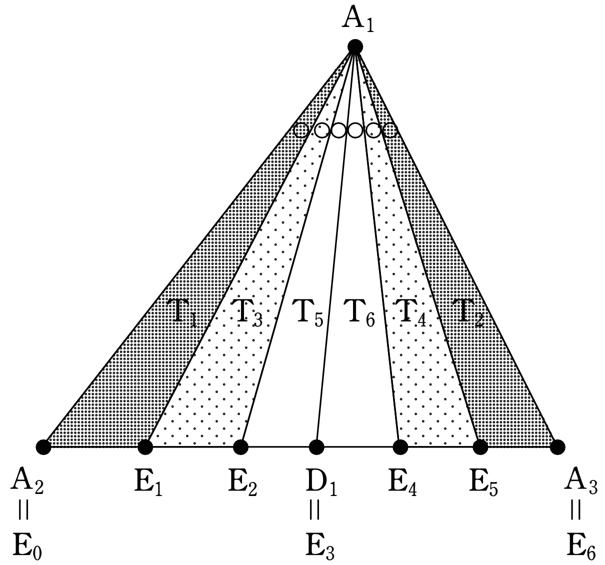
$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = \frac{a^2mn\overrightarrow{\mathrm{OA_1}} + b^2nl\overrightarrow{\mathrm{OA_2}} + c^2lm\overrightarrow{\mathrm{OA_3}}}{a^2mn + b^2nl + c^2lm}$$

となる。

【解答例の(1)の図】



【解答例の(2)の図】



【註釈 2 の図】