数学解法コンテスト　第11回　問題 A

$F(x)$ は定数でない多項式であり，任意の自然数 n に対し，次の条件を満たす $\triangle \mathrm{A}_n\mathrm{B}_n\mathrm{C}_n$ が存在するものとする．

$\mathrm{B}_n\mathrm{C}_n = F(n)$，$\mathrm{C}_n\mathrm{A}_n \fallingdotseq \mathrm{A}_n\mathrm{B}_n$ である．また，$\angle \mathrm{A}_n$ の 2 等分線と辺 $\mathrm{B}_n\mathrm{C}_n$ の交点を D_n とすると，$\triangle \mathrm{A}_n\mathrm{B}_n\mathrm{D}_n$，$\triangle \mathrm{A}_n\mathrm{C}_n\mathrm{D}_n$ の各辺の長さは自然数であり，それらの最大公約数は 1 である．

このような $F(x)$ のうち，$F(1)$ が最小であるものを 1 つ求めよ．

数学解法コンテスト　第11回　問題A

(解答例)

以下，自然数 $k,\ l$ の最大公約数を $(k,\ l)$ で表すことにする．

まず，任意の自然数 n に対し，次の命題 (α), (β) が同値であることを示す．

(α) 題意の条件を満たす $\triangle\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n\mathrm{C}_n$ が存在する．

(β) 次の 5 つの条件を満たす自然数 $b',\ c',\ g,\ h$ の組が存在する．

(1) $b' \fallingdotseq c'$，$(b',\ c')=1$

(2) $F(n)=(b'+c')h$

(3) $\left|\dfrac{b'-c'}{b'+c'}\right|g<h<g$

(4) $b'c'(g^2-h^2)$ は平方数である．

(5) $(g,\ h)=1$

$(\alpha)\Longrightarrow(\beta)$:

$$a=\mathrm{B}_n\mathrm{C}_n,\ b=\mathrm{C}_n\mathrm{A}_n,\ c=\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n,\ d=\mathrm{A}_n\mathrm{D}_n,\ e=\mathrm{B}_n\mathrm{D}_n,\ f=\mathrm{C}_n\mathrm{D}_n$$

とおく．これらはすべて自然数であり

$$b=b'g,\ c=c'g\ \ (g=(b,\ c),\ b',\ c' \text{は (1) を満たす自然数})$$

と表せる．

角の 2 等分線の定理により，$e:f=c:b$ であるから

$$e=\frac{ac}{b+c}=\frac{ac'}{b'+c'}$$

ここで，$(b'+c',\ c')$ は $b'=(b'+c')-c'$ と c' の公約数であるから 1 である．したがって，$b'+c'$ は $a=F(n)$ の約数であり，(2) を満たす自然数 h が存在する．

$a=(b'+c')h,\ b=b'g,\ c=c'g$ は三角形の 3 辺の長さであるから

$$|b'g-c'g|<(b'+c')h<b'g+c'g$$

すなわち (3) が成り立つ．また

$$e=c'h,\ f=\frac{ab}{b+c}=\frac{ab'}{b'+c'}=b'h$$

であるから，$\triangle\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n\mathrm{D}_n$ と $\triangle\mathrm{A}_n\mathrm{C}_n\mathrm{D}_n$ に余弦定理を用いて

$$\begin{cases} (c'g)^2=(c'h)^2+d^2-2\cdot c'h\cdot d\cos\angle\mathrm{A}_n\mathrm{D}_n\mathrm{B}_n & \cdots① \\ (b'g)^2=(b'h)^2+d^2+2\cdot b'h\cdot d\cos\angle\mathrm{A}_n\mathrm{D}_n\mathrm{B}_n & \cdots② \end{cases}$$

$$(\because\ \angle\mathrm{A}_n\mathrm{D}_n\mathrm{C}_n=\pi-\angle\mathrm{A}_n\mathrm{D}_n\mathrm{B}_n)$$

①$\times b'+$②$\times c'$ から

$$b'c'(b'+c')g^2=b'c'(b'+c')h^2+(b'+c')d^2$$

したがって

$$d^2=b'c'(g^2-h^2)$$

であり，(4) が成り立つ．また，$g,\ h$ が共通の素因数をもつならば，それは $b,\ c,\ d,\ e,\ f$ を割り切ることになるが，これは仮定に反するから，(5) が成り立つ．

$(\beta)\Longrightarrow(\alpha)$:

$$a=(b'+c')h,\ b=b'g,\ c=c'g$$

とおくと，(3) により $a,\ b,\ c$ を 3 辺の長さとする三角形が存在する．その 3 頂点を A_n, B_n, C_n

$(\mathrm{B}_n\mathrm{C}_n = a,\ \mathrm{C}_n\mathrm{A}_n = b,\ \mathrm{A}_n\mathrm{B}_n = c)$ とすると，上記の議論から分かるように，$\triangle \mathrm{A}_n\mathrm{B}_n\mathrm{C}_n$ は題意の条件を満たす.

次に，ある $F(x)$ が $F(1) \leqq 6$ を満たすと仮定して矛盾を導く.
この $F(x)$ と $n=1$ に対し，(β) が成り立つから

$$(b'+c')h \leqq 6\ (b'+c' \geqq 3)$$
$$(b'+c',\ h) = (3,\ 1),\ (3,\ 2),\ (4,\ 1),\ (5,\ 1),\ (6,\ 1)$$

(β) は $b',\ c'$ に関して対称であるから，$b' < c'$ として論じればよい.
(3) により，$(b'+c',\ h) = (4,\ 1)$ のときは

$$(b',\ c') = (1,\ 3),\ 1 < g < 2$$

となり，$(b'+c',\ h) = (6,\ 1)$ のときは

$$(b',\ c') = (1,\ 5),\ 1 < g < \frac{3}{2}$$

となるが，これらを満たす自然数 g は存在しない.
$(b'+c',\ h) = (3,\ 1)$ のときは

$$(b',\ c') = (1,\ 2),\ 1 < g < 3$$
$$g = 2,\ b'c'(g^2-h^2) = 2\cdot 3$$

となる ((4) 不成立).
$(b'+c',\ h) = (3,\ 2)$ のときは

$$(b',\ c') = (1,\ 2),\ 2 < g < 6$$
$$g = 3,\ 4,\ 5$$

であり，これらの g の値に対し，$b'c'(g^2-h^2)$ の値は順に

$$2\cdot 5,\ 2^3\cdot 3,\ 2\cdot 3\cdot 7$$

となる ((4) 不成立).
$(b'+c',\ h) = (5,\ 1)$ のときは，$(b',\ c') = (1,\ 4),\ (2,\ 3)$
$(b',\ c') = (1,\ 4)$ ならば $1 < g < \dfrac{5}{3}$ （不適）．$(b',\ c') = (2,\ 3)$ ならば，

$$1 < g < 5,\ g = 2\cdot 3\cdot 4$$

であり，これらの g の値に対し，$b'c'(g^2-h^2)$ の値は順に

$$2\cdot 3^2,\ 2^4\cdot 3,\ 2\cdot 3^2\cdot 5$$

となる ((4) 不成立).
よって，すべての $F(x)$ は $F(1) \geqq 7$ を満たす.
最後に，$x(2x+5)$ が，$F(1)$ が最小となる $F(x)$ のうちの 1 つであることを示す.
$F(x) = x(2x+5)$ とおくと，$F(1) = 7$ であるから，この $F(x)$ と任意の自然数 n に対し，(β) が成り立つことを示せばよい.

$$b' = 2n+1,\ c' = 4,\ g = n+1,\ h = n$$

とおくと，これらは自然数であり，

$$b' \fallingdotseq c',\ (b',\ c') = 1$$
$$F(n) = n(2n+5) = (b'+c')h$$
$$(g,\ h) = 1\ (\because\ g-h=1)$$
$$b'c'(g^2-h^2) = 4(2n+1)\{(n+1)^2-n^2\} = \{2(2n+1)\}^2$$

となる ((1), (2), (4), (5) 成立)．また

$$|\,b'-c'\,| = |\,2(n-1)+(-1)\,| \leqq |\,2(n-1)\,| + |-1\,| = 2n-1$$
$$|\,b'-c'\,|g \leqq (2n-1)(n+1) = 2n^2+n-1 < 2n^2+5n = (b'+c')h$$

であるから，(3) も成り立つ.

【注釈】

条件を満たす $F(x)$ のうち $F(1)$ が最小であるものは，$F(x)=x(2x+5)$ 以外にも色々ある．そのうちの 2 つを紹介する．

1. $F(x)=2x^2+4x+1$

   $F(x)$ と任意の自然数 n に対し，次のような $\triangle \mathrm{A}_n\mathrm{B}_n\mathrm{C}_n$ が存在する．

   $\mathrm{B}_n\mathrm{C}_n=2n^2+4n+1=F(n)$

   $\mathrm{C}_n\mathrm{A}_n=(n+1)^3$，$\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n=n(n+1)(n+2)$

   $\left(\ \mathrm{A}_n\mathrm{D}_n=n(n+1)(n+2),\ \mathrm{B}_n\mathrm{D}_n=n(n+2),\ \mathrm{C}_n\mathrm{D}_n=(n+1)^2\ \right)$

2. $F(x)=8x^2-1$

   $F(x)$ と任意の自然数 n に対し，次のような $\triangle \mathrm{A}_n\mathrm{B}_n\mathrm{C}_n$ が存在する．

   $\mathrm{B}_n\mathrm{C}_n=8n^2-1=F(n)$

   $\mathrm{C}_n\mathrm{A}_n=8n^3$，$\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n=2n(4n^2-1)$

   $\left(\ \mathrm{A}_n\mathrm{D}_n=2n(4n^2-1),\ \mathrm{B}_n\mathrm{D}_n=4n^2-1,\ \mathrm{C}_n\mathrm{D}_n=4n^2\ \right)$

数学解法コンテスト　第11回　問題 B

(問題)

次の条件 $(\alpha), (\beta)$ を満たす集合 S_1, S_2, S_3, S_4 の組はいくつあるか。

(α)　$S_k\,(k=1,2,3,4)$ の和集合は $\{1,2,3,\cdots,15,16\}$ であり, そのうちのどの 2 つも共通の要素をもたない。

(β)　$S_k\,(k=1,2,3)$ のすべての要素にある自然数 d_k を加えた数全体 の集合は S_{k+1} に一致する。

数学解法コンテスト　第11回　問題B

(解答例)

$(S_1,\ S_2,\ S_3,\ S_4)$ を条件を満たす集合の組とする．(α) により S_1 は有限集合である．S_1 の要素の個数を m とすると，(β) により S_k $(k=2,\ 3,\ 4)$ の要素の個数はいずれも m である．したがって，(α) により S_k $(1 \leqq k \leqq 4)$ の和集合の要素の個数は $4m$ であり, これが 16 に等しいから $m=4$ である．

次に S_k $(1 \leqq k \leqq 4)$ の要素である自然数を小さい順に a_{k1}，a_{k2}，a_{k3}，a_{k4} とし，自然数 d_1', d_2', d_3' を $d_l' = a_{k\,l+1} - a_{kl}$ $(1 \leqq l \leqq 3)$ で定める．$a_{1\,1}=1$ に注意して $d_0 = d_0' = 0$ とおくと，(β) により

$$(*) \quad a_{kl} = 1 + \sum_{i=0}^{l-1} d_i' + \sum_{i=0}^{k-1} d_i \ (1 \leqq k \leqq 4,\ 1 \leqq l \leqq 4)$$

となる．

さて (α) の後半が成立しないのはある自然数の組 $(k,\ l,\ s,\ t)$ $(1 \leqq s < k \leqq 4,\ 1 \leqq l < t \leqq 4)$ に対し，$a_{kl} = a_{st}$，つまり

$$1 + \sum_{i=0}^{l-1} d_i' + \sum_{i=0}^{k-1} d_i = 1 + \sum_{i=0}^{t-1} d_i' + \sum_{i=0}^{s-1} d_i$$

が成立する場合である．この等式を整理すると

$$\sum_{i=s}^{k-1} d_i = \sum_{i=l}^{t-1} d_i'$$

となるから (α) の後半の条件は次のようになる．

$$\sum_{i=s}^{k-1} d_i \neq \sum_{i=l}^{t-1} d_i' \ (1 \leqq s < k \leqq 4,\ 1 \leqq l < t \leqq 4) \quad \cdots ①$$

次に S_k $(1 \leqq k \leqq 4)$ の要素の総和を t_k とする．すると

$$t_1 = 1 + (1 + d_i') + (1 + d_1' + d_2') + (1 + d_1' + d_2' + d_3') = 4 + 3d_1' + 2d_2' + d_3'$$

であるから (β) を用いて

$$t_2 = t_1 + 4d_1,\ \ t_3 = t_2 + 4d_2 = t_1 + 4(d_1 + d_2)$$
$$t_4 = t_3 + 4d_3 = t_1 + 4(d_1 + d_2 + d_3)$$
$$t_1 + t_2 + t_3 + t_4 = 4t_1 + 4(3d_1 + 2d_2 + d_3) = 4(4 + 3d_1' + 2d_2' + d_3') + 4(3d_1 + 2d_2 + d_3)$$

がいえる．一方 (α) により $t_1 + t_2 + t_3 + t_4$ は $1+2+3+\cdots+15+16 = 8 \cdot 17$ に等しいから

$$3d_1' + 2d_2' + d_3' + 3d_1 + 2d_2 + d_3 = 30 \quad \cdots ②$$

となる．また $16 = a_{4\,4}$ であるから $(*)$ により

$$d_1' + d_2' + d_3' + d_1 + d_2 + d_3 = 15 \quad \cdots ③$$

であり,

$$②かつ③ \iff ③かつ\ ② - ③ \times 2 : d_1' - d_3' + d_1 - d_3 = 0$$
$$\iff 「d_1' + d_1 = d_3' + d_3 \ かつ\ 2(d_1' + d_1) + d_2' + d_2 = 15」\cdots ④$$

が成り立つ．

逆に①かつ④を満たす自然数 d_1'，d_2'，d_3'，d_1，d_2，d_3 の組に対し，$(*)$ を用いて a_{kl} $(1 \leqq k \leqq 4,\ 1 \leqq l \leqq 4)$ を定め，上記のように S_1，S_2，S_3，S_4 の組を作るとそれは (α), (β) を満たす．これらの組は1対1に対応するから①かつ④を満たす自然数 d_1', d_2', d_3', d_1, d_2, d_3 の組の個数を求めればよい.

さて $a_{1\,2} = 1 + d_1'$, $a_{2\,1} = 1 + d_1$ の一方は 2 に等しいから

(i) $d_1' = 1$　または　(ii) $d_1 = 1$

(i) の場合

①から $d_i' \neq d_j$, $d_i' + d_j \geqq 1 + 2 = 3$ であり

$$2(d_1' + d_1) = 15 - (d_2' + d_2) \leqq 15 - 3 = 12$$

したがって，$3 \leqq d_1' + d_1 = 1 + d_1 \leqq 6$ である．

(1) $d_3' + d_3 = 1 + d_1 = 3$ のとき

$d_i' \fallingdotseq d_1 = 2,\ d_i \fallingdotseq d_1' = 1,\ d_3' = 1,\ d_3 = 2,\ d_2' + d_2 = 9$

$(d_2',\ d_2) = (1,\ 8)$ ならば，$d_1 = 2 = 1 + 1 = d_1' + d_2'$（不適）．

$(d_2',\ d_2) = (3,\ 6)$ ならば，$(d_1',\ d_2',\ d_3',\ d_1,\ d_2,\ d_3) = (1,\ 3,\ 1,\ 2,\ 6,\ 2)$（適）．

$(d_2',\ d_2) = (4,\ 5)$ ならば，$d_2 = 5 = 1 + 4 = d_1' + d_2'$（不適）．

$(d_2',\ d_2) = (6,\ 3)$ ならば，$d_1 + d_2 + d_3 = 2 + 3 + 2 = 1 + 6 = d_1' + d_2'$（不適）．

$(d_2',\ d_2) = (7,\ 2)$ ならば，$(d_1',\ d_2',\ d_3',\ d_1,\ d_2,\ d_3) = (1,\ 7,\ 1,\ 2,\ 2,\ 2)$（適）．

(2) $d_3' + d_3 = 1 + d_1 = 4$ のとき

$d_i' \fallingdotseq d_1 = 3,\ d_i \fallingdotseq d_1' = 1,\ d_3 \fallingdotseq d_3',\ d_3' = 1,\ d_3 = 3,\ d_2' + d_2 = 7$

$(d_2',\ d_2) = (1,\ 6)$ ならば，$d_1 = 3 = 1 + 1 + 1 = d_1' + d_2' + d_3'$（不適）．

$(d_2',\ d_2) = (2,\ 5)$ ならば，$d_1 = 3 = 1 + 2 = d_1' + d_2'$（不適）．

$(d_2',\ d_2) = (4,\ 3)$ ならば，$d_1 + d_2 = 3 + 3 = 1 + 4 + 1 = d_1' + d_2' + d_3'$（不適）．

$(d_2',\ d_2) = (5,\ 2)$ ならば，$d_1 + d_2 = 3 + 2 = 5 = d_2'$（不適）．

(3) $d_3' + d_3 = 1 + d_1 = 5$ のとき

$d_i' \fallingdotseq d_1 = 4,\ d_i \fallingdotseq d_1' = 1,\ d_2' + d_2 = 5$

$(d_2',\ d_2) = (d_3',\ d_3) = (1,\ 4)$ ならば，$(d_1',\ d_2',\ d_3',\ d_1,\ d_2,\ d_3) = (1,\ 1,\ 1,\ 4,\ 4,\ 4)$（適）

$(d_2',\ d_2) = (1,\ 4),\ (d_3',\ d_3) = (2,\ 3)$ ならば，$d_1 = 4 = 1 + 1 + 2 = d_1' + d_2' + d_3'$（不適）．

$(d_2',\ d_2) = (1,\ 4),\ (d_3',\ d_3) = (3,\ 2)$ ならば，$d_3 = 2 = 1 + 1 = d_1' + d_2'$（不適）．

$(d_2',\ d_2) = (2,\ 3)$ ならば，$d_2 = 3 = 1 + 2 = d_1' + d_2'$（不適）．

$(d_2',\ d_2) = (3,\ 2)$ ならば，$d_1 = 4 = 1 + 3 = d_1' + d_2'$（不適）．

(4) $d_3' + d_3 = 1 + d_1 = 6$ のとき

$d_i \fallingdotseq d_1',\ d_2' + d_2 = 3,\ d_2 = 2,\ d_2' = 1,\ d_2 = 2 = 1 + 1 = d_1' + d_2'$（不適）．

よって，この場合には条件を満たす自然数 $d_1',\ d_2',\ d_3',\ d_1,\ d_2,\ d_3$ の組が 3 組ある．同様にして，(ii) の場合にも条件を満たす自然数 $d_1',\ d_2',\ d_3',\ d_1,\ d_2,\ d_3$ の組が 3 組あることがいえる．

以上により，(α), (β) を満たす集合 $S_1,\ S_2,\ S_3,\ S_4$ の組は $3 + 3 = 6$ 組ある．

【注釈 1】

条件を満たす自然数 $d_1',\ d_2',\ d_3',\ d_1,\ d_2,\ d_3$ の組に対し，それに対応する $S_k\ (1 \leqq k \leqq 4)$ の要素を次のように表示することにする．

$$\begin{array}{cccc} a_{1\,1} & a_{1\,2} & a_{1\,3} & a_{1\,4} \\ a_{2\,1} & a_{2\,2} & a_{2\,3} & a_{2\,4} \\ a_{3\,1} & a_{3\,2} & a_{3\,3} & a_{3\,4} \\ a_{4\,1} & a_{4\,2} & a_{4\,3} & a_{4\,4} \end{array}$$

$(d_1',\ d_2',\ d_3',\ d_1,\ d_2,\ d_3) = (1,\ 3,\ 1,\ 2,\ 6,\ 2)$ のとき

$$\begin{array}{cccc} 01 & 02 & 05 & 06 \\ 03 & 04 & 07 & 08 \\ 09 & 10 & 13 & 14 \\ 11 & 12 & 15 & 16 \end{array}$$

$(d_1',\ d_2',\ d_3',\ d_1,\ d_2,\ d_3)=(1,\ 7,\ 1,\ 2,\ 2,\ 2)$ のとき

01	02	09	10
03	04	11	12
05	06	13	14
07	08	15	16

$(d_1',\ d_2',\ d_3',\ d_1,\ d_2,\ d_3)=(1,\ 1,\ 1,\ 4,\ 4,\ 4)$ のとき

01	02	03	04
05	06	07	08
09	10	11	12
13	14	15	16

$(d_1',\ d_2',\ d_3',\ d_1,\ d_2,\ d_3)=(2,\ 6,\ 2,\ 1,\ 3,\ 1)$ のとき

01	03	09	11
02	04	10	12
05	07	13	15
06	08	14	16

$(d_1',\ d_2',\ d_3',\ d_1,\ d_2,\ d_3)=(2,\ 2,\ 2,\ 1,\ 7,\ 1)$ のとき

01	03	05	07
02	04	06	08
09	11	13	15
10	12	14	16

$(d_1',\ d_2',\ d_3',\ d_1,\ d_2,\ d_3)=(4,\ 4,\ 4,\ 1,\ 1,\ 1)$ のとき

01	05	09	13
02	06	10	14
03	07	11	15
04	08	12	16

【注釈 2】

$a_{1\,1}=1,\ a_{4\,4}=16$ であるから $a_{1\,2}=2$ または $a_{2\,1}=2,\ a_{3\,4}=15$ または $a_{4\,3}=15$ である．

$a_{1\,2}=2$ のとき

$a_{3\,4}=15$ ならば，$d_1'=d_3=1$ であるから $a_{1\,4}=a_{1\,3}+1=a_{2\,3}$（不適）．したがって，

$a_{4\,3}=15,\ d_1'=d_3'=1$ である．

（同様にして，$a_{2\,1}=2$ のとき，$a_{3\,4}=15,\ d_1=d_3=1$ がいえる．）

これを用いると場合分けを減らすことができる．

【注釈 3】

$S=\{1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 15,\ 16\}$ とし，$S_1,\ S_2,\ S_3,\ S_4$ は条件を満たす集合の組とする．

$S_1=\{\,1+a_k \mid k=1,\ 2,\ 3,\ 4\}$

（ただし，$a_k\ (k=1,\ 2,\ 3,\ 4)$ は $0 \leqq a_1<a_2<a_3<a_4$ である整数）

とおける．また

$$b_1=0,\ \ b_k=\sum_{l=1}^{k-1} d_l\ (k=2,\ 3,\ 4)$$

$$A_k = \sum_{a \in S_k} 2^{a-1} \ (k = 1,\ 2,\ 3,\ 4)$$

$$B = \sum_{k=1}^{4} 2^{b_k} = 1 + 2^{b_1} + 2^{b_2} + 2^{b_3}$$

とおく．$b_k\ (k = 1,\ 2,\ 3,\ 4)$ は $0 = b_1 < b_2 < b_3 < b_4$ である整数であり，

$$S_k = \{a + b_k \mid a \in S_1\}\ (k = 1,\ 2,\ 3,\ 4)$$

$$A_k = 2^{b_k} A_1\ (k = 1,\ 2,\ 3,\ 4)$$

$$A_1 B = \sum_{k=1}^{4} A_k = \sum_{a \in S} 2^{a-1} = 2^{16} - 1 = (1+2^1)(1+2^2)(1+2^4)(1+2^8)$$

$$(A_1 = 2^{a_1} + 2^{a_2} + 2^{a_3} + 2^{a_4})$$

となる．$A_1,\ B$ は 1 より大きな整数であり，自然数に関する 2 進法表記の一意性から

$$\{A_1,\ B\} \cap \left\{1+2^1,\ 1+2^2,\ 1+2^4,\ 1+2^8\right\} = \emptyset$$

ここで，$1+2^1 = 3,\ 1+2^2 = 5,\ 1+2^4 = 17,\ 1+2^8 = 257$ はいずれも素数である．したがって，$P_k = 1 + 2^{2^k}\ (k = 0,\ 1,\ 2,\ 3)$ とおくと

$$A_1 = P_i P_j,\ B = P_k P_l\ (\{i,\ k,\ l,\ j\} = \{0,\ 1,\ 2,\ 3\},\ i < j,\ k < l)$$

のいずれかが成り立つ．また相異なる $S_1,\ S_2,\ S_3,\ S_4$ の組に対し，対応する $A_1,\ B$ の組も相異なる（これは $a_k,\ b_k\ (k = 1,\ 2,\ 3,\ 4),\ A_1,\ B$ の定め方と，自然数に関する 2 進法表記の一意性による）．よって，条件を満たす $S_1,\ S_2,\ S_3,\ S_4$ の組の個数は ${}_4\mathrm{C}_2 = 6$ 以下である．

　一方，次の 6 つの $S_1,\ S_2,\ S_3,\ S_4$ の組は条件を満たす.

（以下略…【注釈 1】参照）