(問題)

正 $2n$ 角形 $\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2\cdots\mathrm{A}_{2n}$ の外心を O とし, 2 点 $\mathrm{A}_i, \mathrm{A}_{n+i}\,(i=1,2,\cdots,n)$ を通る直線を $d(i)$ とする. また $\{a_1, a_2, \cdots, a_n\} = \{1, 2, \cdots, n\}$ を満たす整数の組 $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ 全体の集合を S とする. そして O を通る任意の直線を l とするとき, $\sigma = (a_1, a_2, \cdots, a_n) \in S$ に対し, 直線 $l_i\,(i=0,1,\cdots,n)$ を次の (1), (2) で定める.

(1) $l_0 = l$

(2) $l_{i-1}, l_i\,(i=1,2,\cdots,n)$ は $d(a_i)$ に関して対称である

このとき, $l_n = l$ となる l の本数を $N(\sigma)$ で表す. ただし, l が無数にある場合には, 特別の値 ∞ を l の本数とする.

$N(\sigma)\,(\sigma \in S)$ のとり得る値を求めよ.

(解答例)

まず $d(i)\,(i=1,2,\cdots,n)$ が直線 OA_i に一致することに注意する．また外接円の半径を 1 として論じればよい．

$$\mathrm{O}(0,0),\ \mathrm{A}_i(\cos\alpha_i,\sin\alpha_i)\ \left(\alpha_i=\frac{\pi(i-1)}{n}\,(i=1,2,\cdots,n)\right)$$

となるように座標軸をとり，l と半円 $x^2+y^2=1\,(-1<x\leqq 1,\ y\geqq 0)$ との交点を $(\cos\theta,\sin\theta)\,(0\leqq\theta<\pi)$ とする．そして $\sigma=(a_1,a_2,\cdots,a_n)\in S$ に対し，角 $\theta_i\,(i=0,1,\cdots,n)$ を次の式で定める．

$$\theta_0=\theta,\ \frac{\theta_{i-1}+\theta_i}{2}=\alpha_{a_i}\,(i=1,2,\cdots,n)$$

このとき 2 点 O, $(\cos\theta_i,\sin\theta_i)$ を通る直線が l_i となる．また

$$(-1)^i\theta_i-(-1)^{i-1}\theta_{i-1}=2(-1)^i\alpha_{a_i}$$

$$\begin{aligned}(-1)^n\theta_n&=\theta_0+\sum_{i=1}^{n}\{(-1)^i\theta_i-(-1)^{i-1}\theta_{i-1}\}\\&=\theta+2\sum_{i=1}^{n}(-1)^i\alpha_{a_i}\end{aligned}$$

が成り立つ．

最初に n が奇数の場合を考える。このとき $\alpha=-\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(-1)^i\alpha_{a_i}$ とおくと

$$-\theta_n=\theta-2\alpha$$

$$\frac{\theta+\theta_n}{2}=\alpha$$

となるから，l と l_n は 2 点 O, $\mathrm{P}(\cos\alpha,\sin\alpha)$ を通る直線に関して対称である．したがって $l_n=l$ となる l は，直線 OP とこれに垂直な O を通る直線だけである．よって $N(\sigma)=2\,(\sigma\in S)$ となる．

次に n が偶数の場合を考える．このとき

$$\begin{aligned}\theta_n&=\theta+2\sum_{i=1}^{n}(-1)^i\alpha_{a_i}\\&=\theta+2\sum_{i=1}^{n}(-1)^i\cdot\frac{\pi(a_i-1)}{n}\\&=\theta+\pi\cdot\frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}(-1)^i a_i\ \left(\because\ \sum_{i=1}^{n}(-1)^i=0\right)\end{aligned}$$

ここで $n=2m$ (m は正の整数), $A=\displaystyle\sum_{k=1}^{m}a_{2k}$, $B=\displaystyle\sum_{k=1}^{m}a_{2k-1}$ とおくと

$$\theta_n=\theta+\pi\cdot\frac{1}{m}(A-B)$$

となるから

$$\begin{aligned}l_n=l&\iff \pi\cdot\frac{1}{m}(A-B)\text{ は }\pi\text{ の整数倍である．}\\&\iff A-B\equiv 0\pmod m\\&\iff (*)\ \ 2A\equiv 0\pmod m\\&\qquad\left(\because\ A+B=\sum_{i=1}^{2m}a_i=\sum_{i=1}^{2m}i=m(2m+1)\equiv 0\pmod m\right)\end{aligned}$$

$(*)$ は θ の選び方によらない，つまり l の選び方によらないから，$(*)$ が成り立つときは $N(\sigma)=\infty$ であり，そうでないときは $N(\sigma)=0$ である．

さて $m=1,2$ のときは, すべての $\sigma \in S$ に対し, $(*)$ は明らかに成り立つ. したがって $n=2,4$ ならば, $N(\sigma)=\infty\,(\sigma \in S)$ となる.

次に $m \geqq 3$ $(n \geqq 6)$ とする. $a_i = i\,(i=1,2,\cdots,n)$ のときは

$$2A = 2\sum_{k=1}^{m} 2k = 4 \cdot \frac{m(m+1)}{2} = 2m(m+1) \equiv 0 \pmod{m}$$

が成り立つから $N(\sigma)=\infty$ となる. また $a_1=2, a_2=1, a_i=i\,(i=3,4,\cdots,n)$ のときは

$$2A = 2(-1+\sum_{k=1}^{m} 2k) = -2+2m(m+1) \equiv -2 \not\equiv 0 \pmod{m}$$

が成り立つから $N(\sigma)=0$ となる.

以上により, $N(\sigma)\,(\sigma \in S)$ のとり得る値は

n が奇数のとき　2

$n=2,4$ のとき　∞

n が 6 以上の偶数のとき　$0,\ \infty$

(n が奇数の場合の別解)

$$\theta_n = \theta - 2(\theta - \alpha)$$

となるから

$$\begin{aligned} l_n = l &\iff 2(\theta-\alpha) \text{ は } \pi \text{ の整数倍である.} \\ &\iff (**)\ \theta = \frac{\pi}{2}k + \alpha \text{ となる整数 } k \text{ が存在する.} \end{aligned}$$

ここで $f(k) = \dfrac{\pi}{2}k + \alpha$ (定義域は整数全体の集合 $\mathbb{Z}$) とおき, $f(k) \geqq 0$ となる整数 k の最小値を m とする．このとき

$$f(k+1) = f(k) + \frac{\pi}{2} > f(k)\ (k \in \mathbb{Z})$$

$$f(m-1) < 0 \leqq f(m) = f(m-1) + \frac{\pi}{2} < \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{\pi}{2} \leqq f(m) + \frac{\pi}{2} = f(m+1) < \pi$$

$$\pi \leqq f(m+1) + \frac{\pi}{2} = f(m+2)$$

となる．したがって $(**)$ が成り立つような $\theta\,(0 \leqq \theta < \pi)$ の値は, 各 $\sigma \in S$ に対し, ちょうど 2 つある．よって $N(\sigma) = 2\,(\sigma \in S)$ となる.